


Berkeley

Berkeley

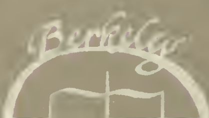
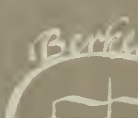
Berkeley


Berkeley

Berkeley

Berkeley


Berkeley

Berkeley




Berkeley
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

# LEÇONS
SUR LES
# MÉTHODES DE STURM
## DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
## ET LEURS DÉVELOPPEMENTS MODERNES

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1913-1914

Par MAXIME BÔCHER
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ HARVARD
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Recueillies et rédigées par Gaston JULIA
ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1917

# LEÇONS

SUR LES

# MÉTHODES DE STURM

DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

ET LEURS DÉVELOPPEMENTS MODERNES.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

# LEÇONS
SUR LES
# MÉTHODES DE STURM
## DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
## ET LEURS DÉVELOPPEMENTS MODERNES,

PROFESSÉES A LA SORBONNE EN 1913-1914

Par MAXIME BÔCHER,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ HARVARD,
PROFESSEUR AGRÉÉ A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Recueillies et rédigées par Gaston JULIA,
ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

# PRÉFACE.

Depuis plusieurs années il existe un échange annuel de professeurs entre l'Université de Paris et l'Université Harvard. J'ai eu l'honneur de représenter celle-ci à Paris depuis le commencement de novembre 1913 jusqu'à la fin de janvier 1914; et ce fut pendant ces trois mois que je professai à la Sorbonne ces leçons que M. Borel a bien voulu me proposer de faire rédiger pour sa série de monographies. Cette rédaction est l'œuvre de M. Gaston Julia, alors élève de troisième année à l'École Normale supérieure : je lui exprime mes plus vifs remercîments pour la façon excellente dont il a accompli sa tâche.

Je n'ai pas cité tous les travaux importants qui se rattachent à mon sujet, mais seulement ceux que le lecteur devra consulter en premier lieu pour pénétrer plus avant dans la théorie. D'autre part, celui qui voudra se renseigner sur le développement historique du sujet peut consulter : 1° l'article II A, 7 *a* de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition allemande (déjà un peu vieilli); 2° la conférence que j'ai faite au 5ᵉ Congrès international (Cambridge, 1912), publiée dans le premier volume des *Proceedings*, page 163.

Je regrette que le temps m'ait manqué pour m'occuper des beaux travaux de Liouville qui suivirent de si près et

apportèrent un complément si important aux recherches de Sturm. C'est ainsi que les questions des valeurs asymptotiques et des développements en série des fonctions arbitraires sont exclues de ce volume. Pourtant, même sous cette forme incomplète, je souhaiterais que ce petit livre fût regardé comme un témoignage de mon admiration pour les travaux de ces deux géomètres français, travaux que nous autres en Amérique avons été fiers de pouvoir développer dans plusieurs directions.

# LEÇONS

SUR LES

# MÉTHODES DE STURM.

---

## CHAPITRE I.

### LES THÉORÈMES D'EXISTENCE [1].

**1. Théorème fondamental.** — Nous aurons souvent, dans ce Cours, à étudier des équations différentielles linéaires du second ordre. Nous les écrirons sous la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = r,$$

$p$, $q$, $r$ étant des fonctions de la variable indépendante $x$.

Avant toutes choses, il importe d'examiner les conditions d'existence des solutions de l'équation précédente. A ce point de vue, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème. — *Soit $x$ une variable réelle pouvant parcourir l'intervalle fermé et fini $A \leqq x \leqq B$, $p$, $q$, $r$ étant des fonctions continues de cette variable $x$ (qui peuvent être de la forme $p_1 + ip_2$, $q_1 + iq_2$, $r_1 + ir_2$, $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$, $r_1$, $r_2$ étant des fonctions réelles et continues de $x$, et $i$ étant le symbole de l'ima-*

---

[1] Pour la méthode des approximations successives dans la théorie des équations non linéaires, on consultera le *Traité d'Analyse* de M. Picard, Tome 2. Pour les équations linéaires, voir :

Peano, *Math. Ann.*, t. XXXII, 1888, p. 450.

Bôcher, *Amer. Journ.*, t. XXIV, 1902, p. 311.

*ginaire) ; soit c une valeur quelconque de l'intervalle* (A, B), *l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = r$$

*admet une solution unique u vérifiant les conditions*

$$(1) \qquad \begin{cases} u(c) = \gamma, \\ u'(c) = \gamma', \end{cases}$$

*$\gamma$ et $\gamma'$ étant deux constantes données quelconques.*

Nous appellerons *système différentiel* l'ensemble de l'équation et des conditions précédentes que la solution doit vérifier en $c$. Notre théorème s'énoncera alors :

Tout système différentiel linéaire du genre précédent a une solution unique. Nous utiliserons la méthode d'approximations successives.

Considérons d'abord l'équation particulière

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ continue dans (A, B).

En intégrant par parties, on trouve que toute solution de cette équation est donnée par la formule

$$u = \int_c^x (x - \xi)\varphi(\xi)\,d\xi + C(x - c) + D.$$

On peut choisir C et D telles que $u$ prenne en $c$ la valeur $\gamma$ et $u'$ la valeur $\gamma'$ : on prendra pour cela $C = \gamma'$ et $D = \gamma$. La solution obtenue est unique, et notre théorème est vrai pour ce cas particulier.

Si par exemple $\gamma = \gamma' = 0$, on trouve

$$u = \int_c^x (x - \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad u' = \int_c^x \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Envisageons le cas général.

Choisissons une fonction $u_0(x)$ soumise à la seule condition d'être continue et d'avoir une dérivée continue dans (A, B), et soit $u_1$ la solution de l'équation

$$u'' = -pu'_0 - qu_0 + r$$

qui vérifie aussi

$$u_1(c) = \gamma, \qquad u'_1(c) = \gamma'.$$

D'après le cas particulier précédent, $u_1$ est unique et bien déterminée; ce sera une fonction à dérivée continue dans (A, B). Nous pourrons donc trouver une fonction $u_2$ telle que

$$u''_2 = -pu'_1 - qu_1 + r \qquad [u_2(c) = \gamma,\ u'_2(c) = \gamma'].$$

En continuant ce processus indéfiniment, nous formerons une suite infinie de fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Nous allons montrer que $u_n$ tend vers une fonction limite qui est solution du système différentiel linéaire proposé.

Il revient au même de démontrer que la série

$$u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots$$

que nous appellerons

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

est convergente et que sa somme est la solution cherchée.

D'après le processus de formation $u_n$ et $u_{n-1}$ sont à dérivée continue dans (A, B). Donc $v_n$ est aussi continue et à dérivée continue $v'_n$.

Démontrons que les deux séries

(2) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

(3) $$v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_n + \ldots$$

sont uniformément convergentes dans (A, B). Nous pouvons partir de $v_2$. $v_2$ et $v'_2$ étant continues dans (A, B) ont un maximum C pour leurs valeurs absolues

$$\left.\begin{array}{l}|v_2|\\ |v'_2|\end{array}\right\} \leqq \mathrm{C}.$$

$p$ et $q$ étant continues, $|p| + |q|$ est une fonction continue admettant un maximum M dans (A, B)

$$|p| + |q| \leqq \mathrm{M}.$$

Soit enfin L la plus grande des deux quantités, 1 et B — A.

Nous allons démontrer que l'on a, quel que soit $n$,

$$\left.\begin{array}{l}|v_n|\\ |v'_n|\end{array}\right\} \leqq \frac{\mathrm{C}\,\mathrm{L}^{n-2}\mathrm{M}^{n-2}\,|x - c|^{n-2}}{(n-2)!};$$

pour $n = 2$, ces inégalités se réduisent à celles qui nous ont fait choisir C. Supposons qu'elles soient vraies jusqu'à l'indice $n-1$ et démontrons qu'elles sont vraies pour $n$.

On a

$$u''_n = -p u'_{n-1} - q u_{n-1} + r,$$
$$u''_{n-1} = -p u'_{n-2} - q u_{n-2} + r.$$

Donc, en retranchant,

$$v''_n = -p v'_{n-1} - q v_{n-1},$$

$v_n$ vérifie donc une équation du type particulier étudié et l'on a de plus

$$v_n(c) = u_n(c) - u_{n-1}(c) = 0,$$
$$v'_n(c) = 0.$$

On en conclut que l'on a

$$v_n = \int_c^x (x-\xi)[-p(\xi)v'_{n-1}(\xi) - q(\xi)v_{n-1}(\xi)]\,d\xi,$$
$$v'_n = \int_c^x [-p(\xi)v'_{n-1}(\xi) - q(\xi)v_{n-1}(\xi)]\,d\xi.$$

Remarquant que $|x-\xi|$ et $1$ sont $\leqq L$, on a

$$\left.\begin{array}{l}|v_n|\\ |v'_n|\end{array}\right\} \leqq \int_c^x L\,M \frac{CL^{n-3}M^{n-3}}{(n-3)!}|\xi - c|^{n-3}|d\xi|.$$

En effectuant l'intégration, on obtient l'inégalité à démontrer.

Remarquant maintenant que $|x-c| < L$, on a

$$\left.\begin{array}{l}|v_n|\\ |v'_n|\end{array}\right\} \leqq \frac{CL^{2(n-2)}M^{n-2}}{(n-2)!}.$$

La série dont le terme général est

$$\frac{CL^{2(n-2)}M^{n-2}}{(n-2)!}$$

est évidemment convergente, quels que soient C, L, M. Donc les séries (2) et (3) sont uniformément convergentes dans tout l'intervalle (A, B). On a d'ailleurs remarqué que $v_n$ comme $u_n$ et $u_{n-1}$ était continue ainsi que $v'_n$.

Si nous désignons par $u$ la somme $v_1 + v_2 + \ldots$, la fonction $u$

est continue ainsi que sa dérivée $u'$ qui est égale à $v'_1 + v'_2 + \ldots$.

Il reste à démontrer que la fonction $u = v_1 + v_2 + \ldots$ est solution du système différentiel :

1° Tout d'abord, on a

$$v_1(c) = u_1(c) = \gamma, \qquad v'_1(c) = u'_1(c) = \gamma',$$
$$v_n(c) = u_n(c) - u_{n-1}(c) = 0 \quad \text{et} \quad v'_n(c) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqq 2.$$

Donc

$$u(c) = \gamma, \qquad u'(c) = \gamma'.$$

2° Je dis que $u$ vérifie en tout point de (A. B) l'équation différentielle.

Formons pour cela la fonction $-pu' - qu$. Les deux séries $u$ et $u'$ étant convergentes, on a

$$-pu' - qu = (-pv'_1 - qv_1) + (-pv'_2 - qv_2) + \ldots.$$

Mais on a

$$-pv'_{n-1} - qv_{n-1} = v''_n \quad \text{pour} \quad n \geqq 3.$$
$$-pv'_1 - qv_1 = v''_1 + v''_2 - r.$$

Donc

$$-pu' - qu = -r + v''_1 + v''_2 + \ldots.$$

D'après la façon même dont nous avons combiné les deux séries $u$ et $u'$, il est clair que la série $v''_1 + v''_2 + \ldots$ est uniformément convergente, d'où il suit que $u$ a une dérivée seconde égale à $v''_1 + v''_2 + \ldots$.

Ce qui permet d'écrire

$$-pu' - qu = -r + u'',$$

et l'on voit bien que $u$ vérifie l'équation différentielle.

Il est prouvé que le système différentiel a une solution $u$ continue et à dérivée continue dans tout l'intervalle (A. B).

*Cette solution est unique.* S'il y en avait deux, leur différence serait solution du système

$$\boxed{u'' + pu' + qu = 0 \qquad \begin{matrix} u(c) = 0, \\ u'(c) = 0 \end{matrix}}$$

et ne serait pas identiquement nulle.

Or ce système, que nous appellerons le *système sans second membre ou système homogène correspondant au système proposé*, n'a qu'une solution qui est zéro.

En effet, entre deux solutions $u_1$ et $u_2$ de l'équation homogène, on établit immédiatement l'identité d'Abel

$$u'_1 u_2 - u'_2 u_1 = k e^{-\int_c^x p\,dx},$$

$k$ étant une certaine constante.

Supposons alors que le système homogène admette une solution $u_1$ non identiquement nulle; ceci voudrait dire qu'on pourrait trouver un point $c_1$ de A, B où $u_1(c_1) \neq 0$.

Formons alors une solution $u_2$ de l'équation homogène, et telle que

$$u_2(c_1) = 0, \qquad u'_2(c_1) = 1.$$

Ceci est possible.

Formons l'identité d'Abel avec ces deux solutions $u_1$ et $u_2$; en y substituant à $x$ la valeur $c$, on a

$$u_1(c) = 0, \qquad u'_1(c) = 0.$$

Donc $k = 0$, c'est-à-dire

$$u'_1 u_2 - u'_2 u_1 = 0.$$

Si maintenant on prend $x$ égal à $c_1$, le premier membre se réduit à $-u_1(c_1)$ qui n'est pas nul. La contradiction est manifeste. Le système homogène n'a donc que la solution zéro.

Donc, le système proposé a une solution unique et bien déterminée.

**2. Extensions diverses du théorème fondamental d'existence.** — La démonstration que nous avons donnée du théorème d'existence est valable pour $x$ réel, et des fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ continues. Nous allons indiquer quelques cas où la démonstration que nous venons de donner s'applique avec assez peu de modifications et qui, ou bien sont plus généraux que le cas précédent, ou bien constituent des applications de la même méthode à des questions similaires.

1° Supposons toujours $x$ réel, $A \leqq x \leqq B$, supposons que $p$, $q$, $r$

soient finies, mais qu'elles puissent admettre un nombre fini de discontinuités dans (A, B). Il nous faut ici préciser ce que nous entendons par solution de l'équation différentielle. Il est évident que ce sera une fonction qui devra vérifier l'équation en tout point où $p$, $q$, $r$ sont continues. Nous exigerons de plus que cette fonction soit partout continue et à dérivée continue. Comme l'hypothèse de la continuité de $p$ et $q$ n'est intervenue que quand nous avons voulu fixer le maximum M de $|p|+|q|$, et qu'ici nous pouvons, puisque $p$ et $q$ sont finies, fixer aussi un nombre M supérieur à $|p|+|q|$, toute la suite de nos raisonnements est valable. Il y a alors une solution, et une seule, pour un système différentiel comme ceux que nous considérons.

2° Supposons que $x$ soit une variable complexe, dont $p$, $q$, $r$ soient des fonctions analytiques définies dans un continuum D au sens de Weierstrass. Ce domaine, dit *de Weierstrass*, sera supposé simplement connexe; sa propriété caractéristique est que de tout point du domaine comme centre on peut décrire un cercle suffisamment petit pour que tous les points intérieurs à ce cercle ou situés sur sa circonférence appartiennent au domaine. Dans certains cas, ce domaine pourra s'étendre à l'infini, mais il sera toujours supposé simplement connexe. Il n'y aurait aucun inconvénient à supposer que ce domaine peut se recouvrir lui-même en certains points à la façon d'une surface de Riemann. Le lecteur se rendra facilement compte qu'on n'a besoin de faire que des modifications très légères à l'analyse précédente pour démontrer que le système (1) a, dans le cas actuel, une solution et une seule.

Le cas où $p$, $q$, $r$ seraient des fonctions analytiques de la variable réelle $x$ dans (A, B), se ramène de suite au précédent, car on peut mettre (A, B) dans un domaine à deux dimensions où $p$, $q$, $r$ soient analytiques en $x$. La solution du système (1) sera nécessairement analytique.

3° Supposons $x$ réel, $p$, $q$, $r$ dépendant du paramètre $\lambda$ réel (on peut supposer que $p$, $q$, $r$ dépendent de $k$ paramètres réels $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_k$; pour simplifier nous en prenons un seul, nos résultats sont encore valables pour $k$ paramètres). Nous supposerons $p$, $q$, $r$ continues par rapport aux deux variables réelles $x$ et $\lambda$ [$x$ dans l'intervalle fermé (A, B), $\lambda$ dans l'intervalle $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ qui peut être ouvert].

On peut également supposer que $\gamma$ et $\gamma'$ sont des fonctions continues de $\lambda$.

Pour chaque valeur de $\lambda$, notre système différentiel a une solution unique. Cette solution sera, dans nos hypothèses, une fonction continue de $x$ et $\lambda$. Il suffira pour s'en assurer de prendre pour C, dans nos calculs d'inégalités, une valeur positive supérieure à $|v_2|$ et $|v'_2|$, quel que soit $x$ dans (A, B) et $\lambda$ dans un intervalle fermé quelconque intérieur à $(\Lambda_1, \Lambda_2)$; et pour M une valeur $\geqq |p| + |q|$ dans les mêmes conditions.

Le raisonnement se poursuit. La série

$$C + \frac{CL^2M}{1!} + \ldots,$$

qui majore les séries $\Sigma v_n$ et $\Sigma v'_n$ est indépendante de $\lambda$. Donc $\Sigma v_n$ et $\Sigma v'_n$ sont uniformément convergentes pour $x$ dans (A, B) et $\lambda$ dans un intervalle fermé intérieur à $(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Donc leurs sommes $u$ et $u'$ sont continues en $x$ et $\lambda$, et comme $u'' = -pu' - qu + r$, $u''$ est aussi continue en $x$ et $\lambda$.

4° Si $x$ est réel, $p$, $q$, $r$ étant continues en $x$ et $\lambda$, et analytiques en $\lambda$ (ou plus généralement analytiques en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$), $\gamma$ et $\gamma'$ étant aussi analytiques en $\lambda$, lorsque $x$ est dans un intervalle (A, B), et $\lambda$ dans un domaine D de Weierstrass, on conclut encore que la solution $u$ ainsi que $u'$ sont continues en $x$ et $\lambda$ et analytiques en $\lambda$.

5° Quel est l'effet produit sur la solution par de petites variations arbitraires des coefficients $p$, $q$, $r$ et de $\gamma$, $\gamma'$? $x$ est supposé réel.

Pour le voir, il importe de discerner comment la solution dépend de $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$.

Elle est déterminée par la connaissance de ces cinq fonctions de $x$ ($\gamma$ et $\gamma'$ sont des constantes, nous les englobons dans le mot *fonction* de $x$), ce que nous écrirons $u = \mathcal{F}(p, q, r, \gamma, \gamma')$.

Mais $\mathcal{F}$ n'est pas une fonction ordinaire des cinq arguments $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, car s'il en était ainsi, la valeur de $u$ ne varierait pas en un point $x_0$ quand on changerait arbitrairement $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$, pourvu qu'en $x_0$ les valeurs de ces cinq fonctions demeurassent les mêmes. Des exemples simples montrent au contraire que, dans ces conditions, la valeur de $u$ change, donc $u$ n'est pas une fonc-

tion ordinaire de $p, q, r, \gamma, \gamma'$. C'est ce qu'on appelle une *fonctionnelle* de ces cinq arguments, c'est-à-dire une fonction de $x$ déterminée dans (A, B) par les trois fonctions $p, q, r$ définies dans (A, B) et les deux constantes $\gamma$ et $\gamma'$. Nous nous bornerons ici au cas où $p, q, r$ sont continues.

Dans ces conditions, je dis que la fonctionnelle

$$u = \mathfrak{F}(p, q, r, \gamma, \gamma')$$

est une *fonctionnelle continue* de ses cinq arguments, c'est-à-dire qu'étant donné un nombre positif $\delta$ aussi petit qu'on voudra, on peut déterminer un nombre positif $\varepsilon$ tel que, une variation quelconque des fonctions $p, q, r$ partout inférieure en valeur absolue à $\varepsilon$, dans l'intervalle (A, B), et une variation quelconque des constantes $\gamma$ et $\gamma'$ également inférieure en valeur absolue à $\varepsilon$, entraîne pour la fonctionnelle $\mathfrak{F}$ une variation qui, dans (A, B), est partout inférieure en valeur absolue à $\delta$.

On répond donc à la question posée au début en démontrant que $u = \mathfrak{F}(p, q, r, \gamma, \gamma')$ est une fonctionnelle continue.

En effet, d'abord on démontre comme pour les fonctions continues que la somme, le produit de plusieurs fonctionnelles continues, sont des fonctionnelles continues. On voit aussi très aisément que l'intégrale

$$\psi = \int_c^x \Phi(p, q, r, \gamma, \gamma')\, dx$$

est une fonctionnelle continue si $\Phi$ l'est.

Il suit de ces propositions élémentaires que les termes des deux séries $\Sigma c_n$ et $\Sigma c'_n$ sont des fonctionnelles continues de $p, q, r, \gamma, \gamma'$. Ces deux séries de fonctionnelles ont leurs termes respectivement inférieurs en module à ceux d'une série de constantes que l'on peut facilement calculer d'après les expressions connues de $c_n$ et $c'_n$, en supposant que nous nous restreignons au champ fonctionnel formé par les fonctions $p, q, r$ continues en $x$ dans (A, B) et finies ainsi que $\gamma$ et $\gamma'$,

$$|p| < \mathrm{N}, \quad |q| < \mathrm{N}, \quad |r| < \mathrm{N}, \qquad |\gamma| < \mathrm{N}, \quad |\gamma'| < \mathrm{N},$$

N étant une certaine constante.

On choisira $C \geqq |v_1|, |v'_1|$, quels que soient $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$ dans ce champ, et l'on voit de suite que c'est possible. De même on choisira $M \geqq |p| + |q|$, par exemple $M = 2N$.

Les deux séries $\Sigma v_n$ et $\Sigma v'_n$ sont alors uniformément convergentes dans le champ précédent, c'est-à-dire qu'on peut déterminer un indice $N_1$ tel que, pour $n_1 \geqq N_1$,

$$\left|\sum_{n_1}^{+\infty} v_n\right| \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n_1}^{+\infty} v'_n\right|$$

soient $< \varepsilon$ quels que soient $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$ dans le champ envisagé. Chaque fonctionnelle $v_n$, $v'_n$ étant continue, on démontre, tout comme pour les séries dont les termes sont des fonctions continues, que les sommes $\Sigma v_n$ et $\Sigma v'_n$, c'est-à-dire $u$ et $u'$, sont des fonctionnelles continues de $p$, $q$, $r$, $\gamma$, $\gamma'$.

Remarquons d'ailleurs que rien dans le raisonnement précédent ne nous empêche de supposer que $p$, $q$, $r$, tout en demeurant finies, ont un nombre fini de discontinuités.

Enfin, cette méthode de variations s'applique si $p$, $q$, $r$ sont analytiques par rapport à la variable complexe $x$ dans un domaine D. Toute petite variation de $p$, $q$, $r$ qui laisse analytiques ces fonctions produit sur $u$, $u'$ une variation uniformément petite dans toute région intérieure à D.

6° Équations quasi-différentielles :

Soit une équation de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[a_1 \frac{d}{dx}(au) + bu\right] + l\frac{d}{dx}(au) - qu = r.$$

Si $a$, $a_1$, $b$ sont dérivables, on a une équation différentielle ordinaire en effectuant les différentiations.

Si $a$, $a_1$, $b$, $l$, $q$, $r$ sont des fonctions continues non dérivables, on n'a plus affaire à une équation ordinaire. Nous supposerons $a$ et $a_1$ partout $\neq 0$ dans (A, B).

Une solution de cette équation sera une fonction $u$ qui permettra d'effectuer les différentiations et qui vérifiera aussi l'équation précédente.

$u$ n'aura pas de dérivée lorsque $a$ n'en aura pas, mais $au$ en aura une. Donc la relation précédente n'est pas, comme les équa-

tions différentielles ordinaires, une relation entre les valeurs de $u$ et de ses dérivées première et seconde. C'est ce que nous appellerons une *équation quasi-différentielle*. Notre méthode d'approximation s'applique; on partira d'une fonction $u_0$ qu'on substituera dans $-l\frac{d}{dx}(au)-qu+r$, et telle que $au$ ait une dérivée continue. De proche en proche, on aura par une série la solution $u$ cherchée et unique vérifiant les conditions

$$u(c)=\gamma,$$
$$\left[\frac{d}{dx}(au)\right]_c=\gamma'.$$

D'ailleurs, ces équations se ramènent à des systèmes différentiels du premier ordre en posant

$$y=au,$$
$$z=bu+a_1y',$$

grâce aux hypothèses $a\neq 0$, $a_1\neq 0$.

7° Ce que nous avons dit de l'équation du deuxième ordre s'applique sans modification essentielle à l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre et au système différentiel

$$\frac{d^n u}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n u=r,$$
$$u(c)=\gamma,$$
$$u'(c)=\gamma',$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$u^{(n-1)}(c)=\gamma^{(n-1)}.$$

**3. Rappel de quelques faits connus.** — Soit une équation

$$\frac{d^n u}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n u=r,$$

soit $c$ un point de l'intervalle $(A, B)$ où les coefficients sont continus, ou bien un point du domaine de Weierstrass où ils sont analytiques; nous appellerons *solutions principales* pour le point $c$ les solutions $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ de l'équation

homogène

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n u = 0,$$

qui vérifient les conditions

$$\begin{array}{llll} u_1(c) = 1, & u'_1(c) = 0, & \ldots, & u_1^{(n-1)}(c) = 0, \\ u_2(c) = 0, & u'_2(c) = 1, & \ldots, & u_2^{(n-1)}(c) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ u_n(c) = 0, & u'_n(c) = 0, & \ldots, & u_n^{(n-1)}(c) = 1. \end{array}$$

Chacune de ces $n$ fonctions $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ est bien déterminée et unique.

$u_1(x), \ldots, u_n(x)$ constituent un système fondamental d'intégrales pour l'équation homogène, puisque toute intégrale de cette équation est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et réciproquement.

Rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour que $n$ solutions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de l'équation homogène forment un système fondamental est que leur wronskien

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ soit } \neq 0.$$

Ce wronskien se calcule par la formule d'Abel

$$\Delta(x) = \Delta(c)\, e^{-\int_c^x p_1\, dx}.$$

Il ne peut être nul en un point sans être identiquement nul.

Une autre condition nécessaire et suffisante pour que le système de solutions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soit fondamental est que $u_1, \ldots, u_n$ soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constantes, non toutes nulles, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telles qu'on ait identiquement

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = 0.$$

La condition $\Delta \neq 0$ est la condition pour que les $n$ solutions $u_1, \ldots, u_n$ soient linéairement indépendantes.

Si l'on revient à l'équation non homogène

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n u = r,$$

sa solution générale s'obtiendra en ajoutant à une solution particulière $u_0$ la solution générale de l'équation homogène

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \ldots + c_n \eta_n$$

($c_1, \ldots, c_n$ étant des constantes, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ un système fondamental de solution de l'équation homogène).



# CHAPITRE II.

## LES ANALOGIES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES AVEC LES SYSTÈMES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES (1).

---

4. **Les systèmes algébriques.** — Dans ses recherches sur les équations différentielles, Sturm, comme beaucoup de ses prédécesseurs, fut amené à les envisager comme limites d'équation aux différences finies.

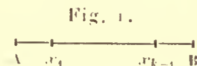
Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p\frac{du}{dx} + qu = r,$$

$p$, $q$, $r$ sont des fonctions continues de $x$ dans l'intervalle (A, B).

On imagine que (A, B) ait été divisé en $k$ parties égales par les

Fig. 1.




points $x_1$, $x_2$, ..., $x_{k-1}$. $\Delta x$ désigne l'une des différences

$$x_i - x_{i-1} \left| \begin{matrix} x_0 = A \\ x_k = B \end{matrix} \right|.$$

On a

$$\Delta u(x_i) = u(x_{i+1}) - u(x_i),$$
$$\Delta^2 u(x_i) = u(x_{i+2}) - 2u(x_{i+1}) + u(x_i).$$

---

(1) Pour les faits purement algébriques, voir, par exemple :

Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, New-York, 1907, ou l'édition allemande de 1909, Teubner.

Pour la théorie de l'*équation* adjointe, voir :

Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, Chap. V.

Pour les *systèmes* différentiels, voir :

Bôcher, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XIV, 1913, p. 403.

Considérons alors l'équation

$$\frac{\Delta^2 u(x_i)}{\Delta x^2} + p(x_i)\frac{\Delta u(x_i)}{\Delta x} + q(x_i)u(x_i) = r(x_i)$$

qui devra avoir lieu pour toutes les valeurs $i = 0, 1, 2, \ldots, k-2$.

Si l'on multiplie les deux membres par $\Delta x^2$, l'équation s'écrit

$$(1)\quad \begin{cases} P_i u(x_i) + Q_i u(x_{i+1}) + R_i u(x_{i+2}) = r_i, \quad r_i = r(x_i)\Delta x^2 \\ \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-2). \end{cases}$$

L'équation (1), qui lie les valeurs de $u$ en trois points de division consécutifs, doit être valable, on l'a vu, pour $i = 0, 1, \ldots, k-2$. Elle donne donc naissance à $k-1$ équations algébriques entre les $k+1$ inconnues $u(x_0)$, $u(x_1)$, ..., $u(x_{k-1})$, $u(x_k)$. Si $k$ tendait vers l'infini, l'équation différentielle initiale apparaîtrait donc comme la limite d'un système d'équations linéaires algébriques, dans lequel le nombre des inconnues, surpassant toujours de deux unités le nombre des équations, tendrait vers l'infini.

Le système (1) admet en général une infinité de solutions dépendant linéairement de deux constantes arbitraires. Sans entrer dans les détails, ceci fait prévoir que l'équation différentielle aura une infinité de solutions dépendant linéairement de deux constantes arbitraires.

Si l'on avait une équation différentielle linéaire d'ordre $n$, on pourrait la regarder comme limite d'une équation aux différences finies, c'est-à-dire d'un système algébrique linéaire dont chaque équation relierait les valeurs de la solution $u$ en $n+1$ points consécutifs choisis parmi $x_0, x_1, \ldots, x_k$, le nombre des inconnues surpassant de $n$ celui des équations.

Nous allons étudier dans ce Chapitre les analogies des systèmes différentiels linéaires et des systèmes algébriques linéaires.

Nous envisagerons d'abord le système homogène algébrique

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1N}\xi_N = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{M1}\xi_1 + a_{M2}\xi_2 + \ldots + a_{MN}\xi_N = 0. \end{cases}$$

On sait que :

1° Le système (2) peut n'avoir que la solution

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_N = 0.$$

Il est dit alors *incompatible*.

2° Si le système (2) a plusieurs solutions

$$\begin{matrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots, & \xi'_N, \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \ldots, & \xi''_N, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

on aura une solution plus générale par les formules

$$c_1\xi'_1 + c_2\xi''_1 + \ldots, \quad c_1\xi'_2 + c_2\xi''_2 + \ldots, \quad \ldots, \quad c_1\xi'_N + c_2\xi''_N + \ldots,$$

où $c_1, c_2, \ldots$ sont des constantes quelconques, et l'on peut toujours trouver un nombre fini de solutions telles que cette dernière formule donne la solution générale du système (2).

Si ces solutions en nombre fini sont linéairement indépendantes, on dira qu'elles forment un *système fondamental de solutions du système* (2).

Rappelons que des solutions

$$\begin{matrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots & \xi'_N, \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \ldots & \xi''_N, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

sont dites *linéairement indépendantes* s'il est impossible de trouver des constantes $k'$, $k''$, ... non toutes nulles telles que l'on ait à la fois

$$\begin{gathered} k'\xi'_1 + k''\xi''_1 + \ldots = 0, \\ k'\xi'_2 + k''\xi''_2 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Le rang du tableau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

est l'ordre maximum d'un déterminant non nul issu de ce tableau; si $p$ est ce rang, on a le théorème suivant :

*Le nombre des solutions d'un système fondamental est tou-*

*jours* $N-p$. *Ce nombre sera appelé* indice de compatibilité du système (2) *ou simplement* indice.

Le lecteur a déjà remarqué l'analogie frappante de ce qui précède avec les traits rappelés à la fin du dernier Chapitre, relativement à l'équation différentielle homogène.

Si l'on envisage un système non homogène

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}\xi_1+\ldots+a_{1N}\xi_N=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{M1}\xi_1+\ldots+a_{MN}\xi_N=b_M, \end{array}\right.$$

on est amené à considérer, parallèlement à la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix},$$

la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1N} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & a_{MN} & b_M \end{pmatrix}$$

et l'on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que le système (3) soit compatible est que le rang de la matrice des $a$ soit égal au rang de la matrice augmentée.

Dans ces conditions, la solution générale du système (3) s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système homogène (2).

5. **Les systèmes différentiels.** — Le système (3), dans le cas où $M=N-n$, est l'analogue d'une équation linéaire d'ordre $n$, non homogène. Pour avoir l'analogue du système algébrique où $M=N$, il faut ajouter, à l'équation différentielle d'ordre $n$, $n$ conditions supplémentaires que devra vérifier la solution. On pourra prendre, par exemple,

$$\begin{aligned} u(c) &= \gamma, \\ u'(c) &= \gamma', \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ u^{(n-1)}(c) &= \gamma^{(n-1)}. \end{aligned}$$

$c$ étant un point de $(A, B)$, $u^{(i)}(c)$ la valeur de $\frac{d^i u}{dx^i}$ au point $c$, et $\gamma, \gamma', \ldots, \gamma^{(n-1)}$ $n$ constantes quelconques. (Ces $n$ conditions, si l'on passe à l'équation aux différences finies, donnent en effet $n$ relations entre les valeurs de $u$ en $n-1$ points consécutifs à $c$, donc $n$ équations linéaires à adjoindre aux $N-n$ que fournit l'équation elle-même.)

Nous allons envisager dans la suite des conditions supplémentaires plus générales :

1° On peut prendre deux points $a$, $b$ dans l'intervalle $(A, B)$, ou dans le domaine de Weierstrass, où l'on astreint $x$ à demeurer, et imposer à une solution la condition

$$\begin{aligned}\alpha u(a) + \alpha' u'(a) + \ldots + \alpha^{(n-1)} u^{(n-1)}(a) \\ + \beta u(b) + \beta' u'(b) + \ldots + \beta^{(n-1)} u^{(n-1)}(b) = \gamma,\end{aligned}$$

$\alpha, \alpha', \ldots, \beta, \beta', \ldots, \gamma$ étant des constantes. (Il serait inutile d'introduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u$, puisque l'équation différentielle permet de l'exprimer en fonction de $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$.)

Nous désignerons par $U(u)$ le premier membre de la condition précédente. Nous prendrons dans ce cas général $m$ conditions de la forme précédente

$$U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On pourrait prendre $h$ points $a, b, \ldots$ dans $(A, B)$, au lieu d'en prendre seulement deux, et imposer une relation linéaire entre les valeurs de $u$ et de ses $(n-1)$ premières dérivées aux points $a, b, \ldots$.

2° On pourrait considérer un deuxième type de condition

$$U_i(u) = \int_A^B [f_i^{(0)}(x) u(x) + f_i^{(1)}(x) u'(x) + \ldots + f_i^{(n-1)}(x) u^{(n-1)}(x)]\, dx = \gamma_i,$$

$f_i^{(0)}, f_i^{(1)}, \ldots, f_i^{(n-1)}$ étant des fonctions données de $x$ que nous supposerons continues pour éviter toute complication.

3° Enfin, en faisant pour $U_i(u)$ la somme d'une expression du type 1° et d'une intégrale du type 2° ci-dessus, on pourrait prendre les conditions plus générales

$$U_i(u) = \gamma_i.$$

Ces conditions sont *linéaires* à un double point de vue :

1° On peut les envisager comme limites de relations linéaires entre les valeurs de $u$ aux $k$ points de division de l'intervalle (A, B) quand $k$ augmente indéfiniment.

2° Si l'on a plusieurs fonctions $u_1, u_2, \ldots$ et qu'on forme la fonctionnelle $U_i$ pour la fonction $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots$, $c_1, c_2\ldots$ étant des constantes quelconques, on a

$$U_i(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots) = c_1 U_i(u_1) + c_2 U_i(u_2) + \ldots ;$$

cette fonctionnelle $U_i(u)$ est distributive, et l'on sait que la distributivité est le caractère essentiel des expressions linéaires algébriques. Toute expression possédant cette propriété distributive peut être dite *linéaire*.

Ceci étant posé, nous envisagerons les systèmes différentiels de la forme

$$(1)\qquad \boxed{\begin{array}{l} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}}$$

où

$$L(u) = \frac{d^n u}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n u.$$

Les conditions $U_i(u) = 0$ peuvent être des conditions linéaires du type le plus général 3° envisagé ci-dessus.

Si $m$ est quelconque, ce système est l'analogue d'un système algébrique linéaire de M équations à N inconnues que nous avons noté (2) au paragraphe 4.

L'analogue du système (3) (§ 4) serait

$$(2)\qquad \boxed{\begin{array}{l} L(u) = r \\ U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \end{array}}$$

Pour ces deux sortes de systèmes, homogènes et non homogènes, nous allons développer une théorie de la compatibilité analogue à celle que nous avons rappelée pour les systèmes algébriques (2) et (3) du paragraphe 4.

Prenons un système homogène (1) :

1° Ce système peut n'admettre que la solution $u = 0$. Il sera dit alors *incompatible*.

2° Il peut admettre des solutions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ linéairement indépendantes. On aura toujours $k \leqq n$, puisque l'équation $L(u) = 0$ a au plus $n$ solutions linéairement indépendantes. Dans ces conditions,

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_k\eta_k$$

sera une solution du système dépendant de $k$ constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Nous appellerons *système fondamental de solutions* un système de solutions linéairement indépendantes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ donnant la solution générale du système différentiel par la formule

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_k\eta_k.$$

Si l'on considère le système avec deuxième membre (2) :

1° Il peut n'avoir pas de solution, car il peut arriver qu'aucune des solutions de $L(u) = r$ ne vérifie les conditions supplémentaires ;

2° Il faut admettre une solution $u_0$. Alors si $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ constituent un système fondamental de solutions du système homogène (2) correspondant à (1), la solution générale de ce système (2) sera

$$u_0 + c_1\eta_1 + \ldots + c_k\eta_k,$$

$c_1, \ldots, c_k$ étant $k$ constantes arbitraires. On a vu que, pour qu'un système algébrique homogène (2) (§ 4) ait $k$ solutions indépendantes, la condition nécessaire et suffisante est que le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} - a_{1N} \\ a_{M1} - a_{MN} \end{pmatrix}$ soit $N - k$.

Étudions, pour le système différentiel homogène (1), une condition analogue.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un système fondamental de solutions de $L(u) = 0$. Choisissons les constantes $c_1, \ldots, c_n$ telles que

$$u = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$$

vérifie les conditions

$$U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

on a les conditions suivantes pour déterminer les $c_i$ :

$$\begin{aligned}
&c_1 U_1\ (u_1) + c_2 U_1\ (u_2) + \ldots + c_n U_1\ (u_n) = 0,\\
&c_1 U_2\ (u_1) + c_2 U_2\ (u_2) + \ldots + c_n U_2\ (u_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&c_1 U_m(u_1) + c_2 U_m(u_2) + \ldots + c_n U_m(u_n) = 0.
\end{aligned}$$

Ce sont des équations linéaires et homogènes en $c_1, \ldots, c_n$.

Il faut considérer le tableau

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} U_1(u_1) & \ldots & U_1(u_n) \\ U_2(u_1) & \ldots & U_2(u_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U_m(u_1) & \ldots & U_m(u_n) \end{pmatrix}.$$

Si $k$ est son rang, on a $n-k$ solutions linéairement indépendantes pour $c_1, \ldots, c_n$. Chacune de ces solutions donne une fonction $u = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$. Nous trouvons ainsi $n-k$ solutions linéairement indépendantes pour le système (1). [Ces solutions sont linéairement indépendantes puisque $u_1, \ldots, u_n$ est un système fondamental de $L(u) = 0$.]

On a donc ce résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour que le système homogène (1) ait $p$ solutions linéairement indépendantes est que le rang du tableau $\mathfrak{T}$ soit $n-p$.

Ce résultat est théorique. Il suppose qu'on a résolu l'équation $L(u) = 0$.

Envisageons le système (2) avec second membre.

Soit $u_0$ une solution particulière de $L(u) = r$, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un système fondamental d'intégrales de $L(u) = 0$.

Alors $u = u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$ est la solution générale de $L(u) = r$; pour qu'une telle solution vérifie

$$U_i(u) = \gamma_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

il faut et il suffit que les $c_i$ vérifient les équations

$$\begin{array}{l} c_1 U_1(u_1) + c_2 U_1(u_2) + \ldots + c_n U_1(u_n) = \gamma_1 - U_1(u_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1 U_m(u_1) + c_2 U_m(u_2) + \ldots + c_n U_m(u_n) = \gamma_m - U_m(u_0). \end{array}$$

Il faut alors envisager, conformément au résultat trouvé pour le système algébrique (3) (§ 4), les deux matrices

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} U_1(u_1) & \ldots & U_1(u_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U_m(u_1) & \ldots & U_m(u_n) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) & \ldots & U_1(u_n) & \gamma_1 - U_1(u_0) \\ \ldots\ldots & & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ U_m(u_1) & U_m(u_2) & \ldots & U_m(u_n) & \gamma_m - U_m(u_0) \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (2) aura des solutions si $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ ont même rang.

Si $n-p$ est ce rang commun, le système (2) aura alors une infinité de solutions dépendant linéairement de $p$ constantes arbitraires, puisqu'il en est ainsi du système qui détermine les $c_i$.

Ce résultat, tout théorique, suppose résolue l'équation $\mathrm{L}(u)=r$.

Cependant, si le rang de $\mathfrak{T}$ est $n$ et si en outre on suppose $m=n$, le système homogène (1) n'a pas de solution, mais le système qui détermine les $c_i$ a toujours une solution unique. On a donc l'énoncé suivant sous une forme indépendante de $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$, énoncé qui a son analogue pour les systèmes linéaires algébriques :

Si $m=n$ et si le système homogène (1) est incompatible, le système (2) a toujours une solution et une seule.

Le parallélisme des systèmes linéaires algébriques et différentiels peut se poursuivre. Pour éviter de trop grandes complications, nous n'envisagerons pas dans la suite les conditions aux limites de la forme $\mathrm{U}_i(u)=\gamma_i$ où entreraient des intégrales du deuxième type signalé. Nous nous bornerons même à imposer aux solutions $u$ des « conditions à deux points $a$ et $b$ », c'est-à-dire de la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_i(u)=\alpha u(a)+\alpha' u'(a)+\ldots\\+\alpha^{(n-1)}u^{(n-1)}(a)+\beta u(b)+\beta' u'(b)+\ldots+\beta^{(n-1)}u^{(n-1)}(b)=\gamma_i,\end{aligned}$$

dont les conditions à un point ne sont qu'un cas particulier.

La théorie du système adjoint à un système différentiel donné présente également la plus grande analogie avec la théorie parallèle dans les équations algébriques.

6. **L'équation adjointe.** — Rappelons d'abord quelques propriétés de l'équation adjointe de Lagrange. Si l'on considère une expression différentielle linéaire

$$\mathrm{L}(u)=l_n\frac{d^n u}{dx^n}+l_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+l_0 u,$$

et si l'on cherche à déterminer un multiplicateur $v$ tel que $v\mathrm{L}(u)$ soit la dérivée d'une expression linéaire par rapport à $u$, $u'$, ...,

$u^{(n-1)}$, on trouve que $v$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(-1)^n \frac{d^n(l_n v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(l_{n-1} v)}{dx^{n-1}} + \ldots + l_0 v = 0$$

qu'on appelle l'*équation adjointe de Lagrange*. On suppose évidemment dans ce qu'on vient de dire que tout coefficient $l_i$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $i$. On particularise ainsi la fonction $l_i$. Nous lèverons plus tard cette restriction. Nous supposons enfin que $l_n \neq 0$ dans tout l'intervalle (A, B) considéré afin que l'équation $L(u) = r$, quand on divise ses deux membres par le coefficient de $\frac{d^n u}{dx^n}$, ait des coefficients continus en tout point de l'intervalle.

Si nous désignons par $M(v)$ le premier membre de l'équation adjointe

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(l_n v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(l_{n-1} v)}{dx^{n-1}} + \ldots + l_0 v,$$

on démontre aisément l'identité

$$(1) \qquad v L(u) - u M(v) = \frac{d}{dx} P(u, v),$$

quels que soient $u$ et $v$. $P(u, v)$ est une forme bilinéaire relativement aux variables $u, u', \ldots, u^{(n-1)}, v, v', \ldots, v^{(n-1)}$.

Si l'on intègre les deux membres de l'identité (1) entre $a$ et $b$, deux points quelconques de l'intervalle (A, B), on a l'identité

$$(2) \qquad \int_a^b [v L(u) - u M(v)]\, dx = [P(u, v)]_a^b.$$

Ces deux formes (1) et (2) sont équivalentes, car si l'on suppose que (2) a lieu quel que soit $b$ dans (A, B), en différentiant les deux membres de (2) par rapport à la limite supérieure $b$ qu'on peut appeler $x$, on retombe sur (1).

Nous appellerons (1) l'*identité de Lagrange* et (2) la *formule de Green*, bien que (1) et (2) aient été données par Lagrange et que Green n'ait pas donné la formule (2). Mais (2) est l'analogue pour une dimension de la formule célèbre de Green, qui, dans certains cas, permet de ramener le calcul d'une intégrale double à celui d'une intégrale curviligne; ceci explique la dénomination que nous choisissons.

Lorsqu'on a établi l'identité (1) ou (2) on en déduit de suite la propriété du multiplicateur, car si $v$ est solution de l'équation adjointe on a $M(v) = 0$, d'où

$$v\,L(u) = \frac{d}{dx} P(u, v).$$

Si l'on intègre les deux membres entre A et B, on a

$$(3) \qquad \int_A^B v\,L(u)\,dx = [P(u, v)]_A^B.$$

L'intégrale $\int_A^B v\,L(u)\,dx$ s'exprime donc par une fonction linéaire des valeurs de $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ aux deux points A et B.

Cherchons l'analogie pour les équations algébriques. Pour simplifier, supposons que $L(u)$ soit une expression différentielle du deuxième ordre, alors le deuxième membre de (3) est une fonction linéaire des valeurs de $u$ et $u'$ en A et B.

Ce qui correspondrait ici à l'expression $L(u)$, c'est M formes linéaires en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ ($M = N - 2$),

$$\begin{gathered} a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1N}\xi_N, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{M1}\xi_1 + \ldots + a_{MN}\xi_N. \end{gathered}$$

$\xi_1, \ldots, \xi_N$ étant les valeurs que prend $u$ aux points de division de l'intervalle (A, B) [d'après l'équation aux différences finies qu'on a substitué à $L(u) = r$]. Multiplier $L(u)$ par une fonction $v$ et intégrer de A à B, aura pour analogue ici : multiplier les formes précédentes respectivement par des constantes $y_1, y_2, \ldots, y_M$, et ajouter les résultats; de plus, $\int_A^B v\,L(u)\,dx$ s'exprimait linéairement par les seules valeurs de $u$ et $u'$ en A et B. Or, la valeur $u(A)$ correspond à $\xi_1$, $u(B)$ à $\xi_N$; $u'(A)$ correspond dans l'équation aux différences finies à une expression linéaire en $\xi_1$ et $\xi_2$; $u'(B)$ à une expression linéaire en $\xi_{N-1}$ et $\xi_N$; nous aurons l'analogue d'un multiplicateur $v$, en choisissant les constantes $y_1, \ldots, y_M$ telles que l'expression

$$y_1(a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1N}\xi_N) + \ldots + y_M(a_{M1}\xi_1 + \ldots + a_{MN}\xi_N)$$

ne renferme que les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \xi_{N-1}, \xi_N$.

On devra donc annuler les coefficients de $\xi_3, \ldots, \xi_{N-2}$, ce qui donnera les équations suivantes, auxquelles devront satisfaire $y_1$, $y_2, \ldots y_N$.

$$(4)\quad \begin{cases} a_{13}\quad y_1 + a_{23}\quad y_2 + \ldots + a_{M3}\quad y_M = 0, \\ a_{14}\quad y_1 + a_{24}\quad y_2 + \ldots + a_{M4}\quad y_M = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1,N-2}y_1 + a_{2,N-2}y_2 + \ldots + a_{M,N-2}y_M = 0. \end{cases}$$

Le tableau des coefficients de ces équations se déduit du tableau des coefficients des formes ci-dessus en $\xi_1, \ldots, \xi_N$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & \ldots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

en permutant les lignes et les colonnes, puis supprimant les deux premières et les deux dernières lignes.

Un système tel que (4) est l'analogue de l'équation adjointe. Et dans le cas où nous nous sommes placés $M = N - 2$, il y a $N - 4$ équations à $N - 2$ inconnues dans (4), comme on devait s'y attendre, puisque l'équation adjointe est ici du deuxième ordre.

Nous reviendrons sur cette analogie après avoir défini le système adjoint à un système différentiel donné. On a, en effet, une analogie bien plus étroite avec les systèmes algébriques si, au lieu de considérer des équations différentielles, on considère des systèmes différentiels.

Auparavant, nous rappellerons quelques faits connus de la théorie des formes bilinéaires.

7. **Les formes bilinéaires.** — Soit deux systèmes de N variables

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N,$$
$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_N.$$

Une forme bilinéaire par rapport à ces variables est une expression telle que

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1N}x_1y_N \\ + & a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2N}x_2y_N \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & a_{N1}x_Ny_1 + a_{N2}x_Ny_2 + \ldots + a_{NN}x_Ny_N, \end{aligned}$$

linéaire par rapport aux $x$ et par rapport aux $y$.

Le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

s'appelle *déterminant de la forme.*

Si $A \neq 0$, la forme est ordinaire; si $A = 0$, la forme est singulière.

Faisons sur les $x_i$ une substitution qui les remplace par les $X_i$,

$$X_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1N}x_N,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$X_N = c_{N1}x_1 + c_{N2}x_2 + \dots + c_{NN}x_N.$$

Nous supposons que cette substitution est ordinaire, c'est-à-dire que le déterminant $C = |c_{ik}|$ n'est pas nul.

On peut alors remplacer les $x_i$ en fonction de $X_i$ dans la forme bilinéaire donnée qui prendra la forme $\Sigma d_{ij}X_i y_j$.

La forme transformée est singulière ou ordinaire, selon que la proposée était singulière ou ordinaire.

Envisageons cette forme transformée; on peut l'écrire

$$X_1Y_1 + X_2Y_2 + \dots + X_NY_N,$$

à condition de poser

$$Y_1 = d_{11}y_1 + d_{12}y_2 + \dots + d_{1N}y_N,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Y_N = d_{N1}y_1 + d_{N2}y_2 + \dots + d_{NN}y_N.$$

Ceci est une substitution qui remplace les $y_i$ par les $Y_i$. Si la forme proposée est ordinaire, cette substitution est ordinaire.

Donc, en supposant la forme initiale ordinaire, on peut, par deux substitutions convenables ordinaires faisant passer des $x_i$ aux $X_i$, et des $y_i$ aux $Y_i$, réduire la forme initiale $\sum_{ij=1}^{N} a_{ij}x_iy_j$ à la forme canonique $\sum_{i=1}^{N} X_iY_i$.

Le déterminant $C$ étant $\neq 0$, les formes $X_1, X_2, \dots, X_N$ en $x_1, \dots, x_N$ sont indépendantes, on pourra les donner arbitrai-

rement. Les formes $Y_1, \ldots, Y_N$ seront alors bien déterminées par le choix des $X_i$, et elles seront indépendantes puisque leur déterminant $D \neq 0$.

Si, laissant $p$ des formes $X_i$ invariables, nous changeons les $q = N - p$ restantes, quel sera l'effet produit sur les formes $Y_i$ ?

Lorsque nous choisissons les formes $X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}$, les formes Y correspondantes sont $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p, Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q}$. Si nous choisissons les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p, X'_{p+1}, \ldots, X'_{p+q}$, en conservant les $p$ premières formes précédentes, et faisant $X'_{p+1}, \ldots, X'_{p+q}$ différentes de $X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}$, mais formant avec $X_1, \ldots, X_p$ un système linéairement indépendant, il leur correspondra pour les Y des formes $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_p, Y'_{p+1}, \ldots, Y'_{p+q}$ linéairement indépendantes. On a évidemment l'identité

$$(1) \qquad \begin{aligned} & X_1 Y_1 + \ldots + X_p Y_p + X_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + X_{p+q} Y_{p+q}, \\ & = X_1 Y'_1 + \ldots + X_p Y'_p + X'_{p+1} Y'_{p+1} + \ldots + X'_{p+q} Y'_{p+q} \end{aligned}$$

où il faut supposer les X les X', les Y les Y' remplacés par leurs expressions en fonctions des $x_i$ et des $y_i$.

Choisissons pour les $x_i$ le système unique de valeurs qui rend

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \ldots, \quad X_p = 0; \quad X'_{p+1} = 1, \quad \ldots, \quad X'_{p+q} = 0.$$

Pour ces valeurs de $x_i$, les formes $X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}$ prennent des valeurs numériques $A_{p+1}, \ldots, A_{p+q}$; en substituant ces valeurs dans l'identité (1), on a l'identité, par rapport aux $y_i$,

$$Y'_{p+1} = A_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + A_{p+q} Y_{p+q}.$$

On trouverait un résultat analogue pour $Y'_{p+2}, \ldots, Y'_{p+q}$. Donc, les $q$ dernières formes $Y'_{p+1}, \ldots, Y'_{p+q}$ s'expriment par des fonctions linéaires et homogènes des anciennes $q$ dernières $Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q}$.

Choisissons maintenant les $x_i$ tels que

$$X_1 = 1, \quad X_2 = X_3 = \ldots = X_p = X'_{p+1} = \ldots = X'_{p+q} = 0,$$

les $X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}$ prennent certaines valeurs numériques $B_{p+1}, \ldots, B_{p+q}$ et l'identité (1) donne l'identité suivante par rapport aux $y_i$,

$$Y'_1 = Y_1 + B_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + B_{p+q} Y_{p+q}.$$

Même résultat pour $Y'_2, \ldots, Y'_p$.

Les $p$ premières formes $Y'_1, \ldots, Y'_p$ sont égales aux $p$ anciennes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ respectivement augmentées de fonctions linéaires et homogènes des $Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q}$.

8. **Les systèmes adjoints.** — Ceci étant rappelé, on a vu que si l'on considère

$$L(u) = l_n \frac{d^n u}{dx^n} + l_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + l_0 u$$

et si $M(u)$ désigne l'expression adjointe, on a l'identité de Lagrange

$$v\,L(u) - u\,M(v) = \frac{d}{dx}[P(u, v)],$$

$P(u, v)$ étant une forme bilinéaire par rapport aux systèmes de variables

$$\begin{array}{llll} u(x), & u'(x), & \ldots, & u^{(n-1)}(x), \\ v(x), & v'(x), & \ldots, & v^{(n-1)}(x). \end{array}$$

On peut former très aisément $P(u, v)$ et l'on trouve

$$\begin{aligned} P(u, v) = {} & u\left[l_1 v - \frac{d(l_2 v)}{dx} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(l_n v)}{dx^{n-1}}\right] \\ & + u'\left[l_2 v - \frac{d(l_3 v)}{dx} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}(l_n v)}{dx^{n-2}}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u^{(n-1)} l_n v. \end{aligned}$$

Le déterminant de la forme s'écrit

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots\ldots\ldots & (-1)^{n-1} l_n \\ \ldots & (-1)^{n-2} l_n & 0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot \\ l_n & 0 \quad \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

les éléments de la deuxième diagonale étant égaux à $\pm l_n$ et les éléments au-dessous étant tous nuls.

Ce déterminant est donc égal à $\pm (l_n)^n$ et, comme nous supposons que l'équation $L(u) = r$ est régulière dans l'intervalle considéré (A, B), nous supposons $l_n \neq 0$ dans cet intervalle. Donc, le déterminant précédent n'est pas nul. La forme $P(u, v)$ est ordinaire pour toute valeur de $x$ prise dans l'intervalle (A, B).

La formule de Green nous donne

$$\int_a^b [v\,\mathrm{L}(u) - u\,\mathrm{M}(v)]\,dx = [\mathrm{P}(u,v)]_a^b.$$

La quantité $[\mathrm{P}(u,v)]_a^b$ est une forme bilinéaire par rapport aux deux séries suivantes de $2n$ variables.

$$\begin{array}{llllllll} u(a), & u'(a), & \ldots, & u^{(n-1)}(a), & u(b), & u'(b), & \ldots, & u^{(n-1)}(b), \\ v(a), & v'(a), & \ldots, & v^{(n-1)}(a), & v(b), & v'(b), & \ldots, & v^{(n-1)}(b). \end{array}$$

Cette forme bilinéaire est d'un caractère particulier; elle est, en réalité, la somme de deux formes bilinéaires : la première, par rapport aux $u^{(i)}(a)$ et $v^{(i)}(a)$; la deuxième, par rapport aux $u^{(i)}(b)$ et $v^{(i)}(b)$.

Le déterminant de cette forme serait

$$\left|\begin{array}{cccc:cccc} \ldots & \ldots & & \mp l_n(a) & 0 & \ldots & & 0 \\ & & \pm l_n(a) & 0 & \vdots & & & \vdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \text{termes} & \vdots & \vdots & \text{termes nuls} & & \vdots \\ & & \text{tous nuls} & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ l_n(a) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ \hdashline 0 & \ldots & & 0 & \ldots & \ldots & & \pm l_n(b) \\ \vdots & & & \vdots & & & \pm l_n(b) & 0 \\ \vdots & \text{termes nuls} & & \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \text{termes} & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \text{nuls} & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & l_n(b) & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right| = \pm [l_n(a)]^n [l_n(b)]^n.$$

Il est $\neq 0$ d'après nos hypothèses, la forme $[\mathrm{P}(u,v)]_a^b$ est donc ordinaire. Elle est donc réductible à la forme canonique.

Prenons $2n$ formes $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{2n}$ linéaires en $u(a)$, $u'(a)$, ..., $u^{(n-1)}(a)$, $u(b)$, ..., $u^{(n-1)}(b)$ et indépendantes

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_1 = {} & \alpha_1\, u(a) + \alpha'_1\, u'(a) + \ldots + \alpha_1^{(n-1)}\, u^{(n-1)}(a) \\ & + \beta_1\, u(b) + \beta'_1\, u'(b) + \ldots + \beta_1^{(n-1)}\, u^{(n-1)}(b), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{U}_{2n} = {} & \alpha_{2n}\, u(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}^{(n-1)} u^{(n-1)}(a) \\ & + \beta_{2n}\, u(b) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_{2n}^{(n-1)}\, u^{(n-1)}(b). \end{aligned}$$

Les $\mathrm{U}_i$, étant choisies indépendantes, entraînent que $2n$ formes $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{2n}$ linéaires en $v(a)$, $v'(a)$, ..., $v^{(n-1)}(a)$, $v(b)$, $v'(b)$, ..., $v^{(n-1)}(b)$, et linéairement indépendantes, se trouvent déterminées

par le choix des $U_i$ et sont telles qu'on ait

$$[P(u, v)]_a^b = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \ldots + U_{2n} V_1.$$

Tout ceci résulte des propositions relatives aux formes canoniques que nous avons déjà rappelées.

La formule de Green s'écrit donc

$$(1) \qquad \int_a^b [v L(u) - u M(v)]\, dx = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \ldots + U_{2n} V_1,$$

d'une infinité de manières, puisqu'on peut choisir les $U_1, \ldots, U_{2n}$ arbitrairement, à condition toutefois que ces formes soient indépendantes.

Il est alors aisé de définir le système adjoint au système

$$(2) \qquad \boxed{\begin{array}{l} L(u) = 0, \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{array}}$$

les $U_i(u)$ étant de la forme habituelle

$$\begin{aligned} U_i(u) = \alpha_i u(a) + \alpha'_i u'(a) + \ldots \\ + \alpha_i^{(n-1)} u^{(n-1)}(a) + \beta_i u(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)} u^{(n-1)}(b); \end{aligned}$$

$a$, $b$ sont deux points de l'intervalle A, B. Nous supposons, bien entendu, les formes $U_1(u), \ldots, U_m(u)$ indépendantes relativement aux variables $u(a), \ldots, u^{(n-1)}(a), u(b), \ldots, u^{(n-1)}(b)$. Il est nécessaire pour cela que l'on ait $m \leqq 2n$.

Soit donc $m$ formes $U_1(u), \ldots, U_m(u)$; nous leur adjoignons $2n - m$ formes $U_{m+1}(u), \ldots, U_{2n}(u)$ telles que $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ soient linéairement indépendantes. Ce choix des $U_{m+1}(u), \ldots, U_{2n}(u)$ est possible d'une infinité de façons. Avec ce choix de $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$, la formule de Green (1) donne $2n$ autres formes $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ linéaires en $v(a), v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a), v(b), \ldots, v^{(n-1)}(b)$. Choisissons les $2n - m$ premières de ces formes et formons le système différentiel

$$(3) \qquad \boxed{\begin{array}{l} M(v) = 0, \\ V_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n - m) \end{array}}$$

On l'appellera le *système adjoint du système* (2).

Les $V_1, \ldots, V_{2n-m}$ dépendant des $U_1, \ldots, U_{2n}$, il semble que le système (3) n'est pas complètement déterminé puisqu'un changement dans les $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ entraîne un changement dans les $V_1, \ldots, V_{2n-m}$. Il n'en est rien au fond, car si l'on remplace les $U_{m+1}, U_{m+2}, \ldots, U_{2n}$ par d'autres formes $U'_{m+1}, U'_{m+2}, \ldots, U'_{2n}$, les $V'_1, \ldots, V'_{2n}$ déterminés par la formule de Green, sont liées aux $V_1, \ldots, V_{2n}$ d'une façon simple que nous avons appris à déterminer. En tenant compte que dans la forme canonique adoptée pour $[P(u, v)]_a^b$, l'ordre des indices des V est renversé, on voit que $V'_1, \ldots, V'_{2n-m}$ sont donnés par des formes linéaires en $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-m}$ telles que

$$V'_i = B_1 V_1 + B_2 V_2 + \ldots + B_{2n-m} V_{2n-m};$$

ces formes sont indépendantes en $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-m}$, car elles sont indépendantes en $v(a), v'(a), \ldots, v(b), v'(b), \ldots$.

Il en résulte que les conditions $V_1 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0$ sont équivalentes aux conditions $V'_1 = 0, \ldots, V'_{2n-m} = 0$. Le système adjoint est donc essentiellement le même ([1]).

Enfin, si dans le système proposé (2) on remplace les $U_i$ par des formes linéaires indépendantes en $U_1(u), \ldots U_m(u)$, le système (2) ne change pas essentiellement. Un raisonnement tout pareil à celui qu'on vient de faire montre qu'alors les conditions du système adjoint $V_1 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0$ ne changent pas essentiellement. Donc, le système adjoint n'est pas altéré.

De plus, la réciprocité entre $L(u)$ et $M(v)$ et la symétrie du deuxième membre de la formule de Green par rapport aux deux groupes de variables $U_i$ et $V_i$ prouvent que le système adjoint à (3) est le système (2). Il y a réciprocité entre un système et son adjoint.

Disons quelques mots de l'analogie algébrique.

---

([1]) Les formes $V_{2n-m+1}, \ldots, V_{2n}$ sont moins intéressantes que $V_1, \ldots, V_{2n-m}$; cependant, l'effet sur ces formes d'un changement de $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ est simple; on a de nouvelles formes liées aux anciennes par des formules telles que

$$V'_{2n-m+i} = V_{2n-m+i} + A_1^{(i)} V_1 + \ldots + A_{2n-m}^{(i)} V_{2n-m},$$

$i$ étant un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., $m$.

Au système différentiel (2) correspond un système homogène

$$(2')\quad \begin{cases} a_{11}\xi_1+\ldots+a_{1N}\xi_N=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{M1}\xi_1+\ldots+a_{MN}\xi_N=0. \end{cases}$$

On trouverait qu'au système adjoint (3) correspond le système homogène (3′) dont le tableau des coefficients est simplement le tableau de (2′) dans lequel on a permuté lignes et colonnes,

$$(3')\quad \begin{cases} a_{11}\eta_1+\ldots+a_{M1}\eta_M=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1N}\eta_1+\ldots+a_{MN}\eta_M=0. \end{cases}$$

L'analogie est plus satisfaisante ici que celle signalée pour l'équation adjointe seule.

Nous ne la poursuivrons pas, car dans les démonstrations ultérieures nous n'utiliserons pas ces analogies algébriques, nous nous contenterons de les signaler quand elles pourront suggérer des faits nouveaux.

**9. Quelques propriétés du système adjoint.** — Pour abréger, nous ne considérons que le cas très important où $m=n$. On a

$$(1)\quad \boxed{\begin{array}{r} L(u)=0 \\ U_1(u)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_n(u)=0 \end{array}}$$

et son adjoint

$$(2)\quad \boxed{\begin{array}{r} M(v)=0 \\ V_1(v)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ V_n(v)=0 \end{array}}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des solutions linéairement indépendantes du système* (1). *Choisissons, comme dans la définition du système adjoint, des formes $U_{n+1}(u), \ldots, U_{2n}(u)$ telles que $U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}, \ldots, U_{2n}$ soient indépendantes. Je*

*dis alors que les $k$ systèmes de constantes*

$$\begin{array}{lll} U_{n+1}(u_1), & \ldots, & U_{2n}(u_1), \\ U_{n+1}(u_2), & \ldots, & U_{2n}(u_2), \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ U_{n+1}(u_k), & \ldots, & U_{2n}(u_k), \end{array}$$

*sont linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'il est impossible de trouver des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ non toutes nulles et telles qu'on ait*

$$c_1 U_{n+i}(u_1) + c_2 U_{n+i}(u_2) + \ldots + c_k U_{n+i}(u_k) = 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

En effet, si l'on pouvait trouver de telles constantes, cela voudrait dire qu'on aurait

$$U_{n+i}(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k) = 0,$$

puisque les opérations U sont linéaires.

Or

$$u = c_1 u_1 + \ldots + c_k u_k$$

est solution de (1) et cette solution vérifierait les $2n$ conditions

$$U_1(u) = 0, \qquad \ldots, \qquad U_{2n}(u) = 0.$$

Ces $2n$ formes $U_1, \ldots, U_{2n}$ étant indépendantes, les équations $U_1 = \ldots = U_{2n} = 0$ admettent la seule solution

$$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(n-1)}(a) = u(b) = \ldots = u^{(n-1)}(b) = 0.$$

Donc, la solution

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_k u_k$$

est identiquement nulle, ce qui entraînerait, puisque $c_1, \ldots, c_k$ ne sont pas toutes nulles, que $u_1, \ldots, u_k$ ne sont pas linéairement indépendantes. La contradiction démontre le lemme.

Ceci posé, remarquons que, dans les systèmes algébriques, si l'on envisage un système

$$\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + \ldots + a_{nn}\xi_n = 0 \end{array}$$

et son adjoint

$$\begin{array}{l} a_{11}\eta_1 + \ldots + a_{n1}\eta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}\eta_1 + \ldots + a_{nn}\eta_n = 0, \end{array}$$

les matrices de ces deux systèmes étant les mêmes à une permutation près des lignes et des colonnes, leur rang est le même. Comme le nombre des variables est aussi le même, ces deux systèmes ont même *indice*, c'est-à-dire même nombre de solutions indépendantes. Ceci suggère le théorème suivant :

Théorème. — *L'indice d'un système différentiel homogène* (1) *est égal à celui de son adjoint* (2).

L'indice est ici aussi le nombre de solutions linéairement indépendantes du système.

Il suffit, si $k$ est l'indice de (1), de démontrer que celui de (2) est $\geqq k$, le théorème résultera alors de la réciprocité entre (1) et (2).

Servons-nous de la formule de Green

$$\int_a^b [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dx = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \ldots + U_{2n} V_1.$$

Soit $u$ une solution du système (1), et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un système fondamental de solutions de $M(v) = 0$. En substituant $u$ et $z_i$ à $u$ et $v$ dans l'identité de Green, on a

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = U_{n+1}(u)\,V_n(z_i) + U_{n+2}(u)\,V_{n-1}(z_i) + \ldots + U_{2n}(u)\,V_1(z_i) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ceci est un système de $n$ équations homogènes en $U_{n+1}(u), \ldots, U_{2n}(u)$. Il est satisfait par les valeurs $U_{n+1}(u_i), \ldots, U_{2n}(u_i)$, $u_i$ étant une solution quelconque de (1). Soient $u_1, \ldots, u_k$ $k$ solutions linéairement indépendantes de (1), qui a l'indice $k$.

D'après le lemme, les $k$ systèmes de constantes

$$U_{n+1}(u_i), \quad \ldots, \quad U_{2n}(u_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

sont linéairement indépendants.

Le système (3) a donc au moins $k$ solutions linéairement indépendantes. Son rang est donc $\leqq n - k$. Or, son rang est celui de la matrice

$$\begin{bmatrix} V_n(z_1) & \ldots & V_1(z_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ V_n(z_n) & \ldots & V_1(z_n) \end{bmatrix}.$$

Or, cette matrice est celle qu'il faut former pour trouver l'indice du système (2). On en conclut que le système (2) a au moins $k$ solutions indépendantes, c'est-à-dire que son indice est $\geqq k$.

Si l'on considère maintenant un système non homogène, l'analogie avec les systèmes algébriques nous suggérera quelques résultats.

Soit le système

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ a_{n1}\xi_1 + \ldots + a_{nn}\xi_n &= b_n. \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit compatible s'exprime simplement à l'aide des déterminants caractéristiques de Rouché. On peut aussi, sans introduire explicitement ces déterminants, dire que la condition nécessaire et suffisante de compatibilité est que toute relation homogène qui relie les $a$ d'une même colonne dans le Tableau $(a_{ik})$ doit relier aussi les $b$, c'est-à-dire que toute solution des équations

$$\begin{aligned} \eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{21} + \ldots + \eta_n a_{n1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ \eta_1 a_{1n} + \eta_2 a_{2n} + \ldots + \eta_n a_{nn} &= 0, \end{aligned}$$

où $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sont les inconnues, doit vérifier la relation

$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \ldots + b_n\eta_n = 0.$$

On voit comment s'introduit naturellement le système adjoint au système homogène correspondant au système donné.

Nous allons, pour le cas d'un système différentiel non homogène, tirer une condition analogue de compatibilité de la formule de Green.

Si le système donné est

$$(4)\qquad \boxed{\begin{aligned} &L(u) = r, \\ &U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}}$$

le système adjoint homogène sera de même par définition,

$$(5)\qquad \boxed{\begin{aligned} &M(v) = 0, \\ &V_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}}$$

Supposons que (4) ait une solution $u$, et soit $v$ une solution quelconque du système adjoint; substituant ces deux fonctions dans l'identité de Green, il vient

$$(6) \qquad \int_a^b rv\,dx = \gamma_1 V_{2n}(v) + \ldots + \gamma_n V_{n+1}(v).$$

Donc, toute solution du système adjoint doit vérifier la relation (6). C'est une condition nécessaire, pour la compatibilité du système (4). On démontre, à l'aide de la formule de Green, qu'elle est aussi suffisante, mais nous ne nous arrêterons pas sur ce point [1].

**10. Les équations quasi-différentielles. Équations du deuxième ordre.** — On a supposé, dans tout ce qui précède, que les coefficients de l'expression

$$L(u) = l_n \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots + l_0 u$$

avaient des dérivées continues jusqu'à un ordre marqué par leur indice, pour pouvoir former l'expression

$$M(v) = (-1)^n \frac{d^n(l_n v)}{dx^n} + \ldots + l_0 v.$$

Ne peut-on se borner à supposer simplement $l_0, l_1, \ldots, l_n$ continus, quitte à élargir la définition de l'expression adjointe ?

Pour la généralisation que nous avons en vue, il est plus simple de considérer tout de suite, au lieu de $L(u)$, une expression quasi différentielle et de développer pour une telle expression la théorie de l'expression adjointe; le cas d'une expression différentielle $L(u)$, où $l_0, \ldots, l_n$ sont simplement continus, sera un cas particulier de la théorie précédente.

Nous ne ferons qu'esquisser cette théorie pour une expression quasi-différentielle du troisième ordre

$$\begin{aligned} L(u) = {} & a_3 \frac{d}{dx} \left\{ a_2 \frac{d}{dx} \left[ a_1 \frac{d}{dx}(a_0 u) + b_1 u \right] + b_2 u \right\} \\ & + l_2 \frac{d}{dx} \left[ a_1 \frac{d}{dx}(a_0 u) + b_1 u \right] + l_1 \frac{d}{dx}(a_0 u) + qu, \end{aligned}$$

si $a_0 a_1 a_2 a_3 \neq 0$.

---

[1] Voir mon Mémoire cité au commencement de ce Chapitre, où l'on trouvera aussi des résultats pour les systèmes différentiels où $m \neq n$, analogues à ceux que nous avons signalés ici pour le cas où $m = n$.

Nous appellerons *adjointe* l'expression

$$M(v) = -a_0 \frac{d}{dx}\left\{ a_1 \frac{d}{dx}\left[ a_2 \frac{d}{dx}(a_3 v) - l_2 v \right] + l_1 v \right\}$$
$$+ b_1 \frac{d}{dx}\left[ a_2 \frac{d}{dx}(a_3 v) - l_2 v \right] - b_2 \frac{d}{dx}(a_3 v) + qv.$$

En formant $vL(u) - uM(v)$, on voit que cette expression est égale à $\frac{d}{dx}P(u, v)$, où $P(u, v)$ est une fonction linéaire en

$$u, \quad \frac{d}{dx}(a_0 u), \quad \frac{d}{dx}\left[ a_1 \frac{d}{dx}(a_0 u) + b_1 u \right],$$
$$v, \quad \frac{d}{dx}(a_3 v), \quad \frac{d}{dx}\left[ a_2 \frac{d}{dx}(a_3 v) - l_2 v \right].$$

Ces six variables sont celles qui, dans le théorème d'existence pour les équations quasi-différentielles, correspondent à

$$\begin{matrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \end{matrix}$$

dans les équations différentielles ordinaires.

Les formules qu'on obtient sont plus compliquées, mais ne diffèrent pas essentiellement de celles obtenues dans la théorie ordinaire de l'adjointe. Avec quelques petits changements, on peut également échafauder une théorie du système adjoint parallèle à celle qu'on a déjà exposée. On voit donc qu'il n'est pas essentiel de supposer que $l_0, l_1, \ldots, l_n$ dans $L(u)$ ont des dérivées jusqu'à certains ordres.

Une question se pose à propos de l'équation adjointe; nous ne l'étudierons que pour les équations du deuxième ordre. Soit

$$L(u) = l_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + l_1 \frac{du}{dx} + l_0 u = r \qquad [l_2 \neq 0 \text{ dans (AB)}].$$

L'adjointe de $L(u)$ est

$$M(v) = l_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (2l'_2 - l_1)\frac{dv}{dx} + (l''_2 - l'_1 + l_0)v.$$

A quelles conditions l'expression $L(u)$ est-elle identique à $M(v)$? On voit immédiatement qu'il faut et il suffit que

$$l'_2 = l_1.$$

Une expression différentielle quelconque du deuxième ordre n'est donc pas toujours sa propre adjointe, mais on peut la rendre telle, comme on voit, par un calcul simple, en la multipliant par le facteur

$$\frac{1}{l_2} e^{\int \frac{l_1}{l_2} dx}.$$

Nous ne diminuerons donc pas la généralité d'une équation du deuxième ordre en supposant que son premier membre est adjoint à lui-même, et en l'écrivant sous la forme adoptée par Sturm,

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dx}\right) - \mathrm{G}u = \mathrm{R}.$$

Cette forme est même plus générale que la forme ordinaire, car K pourra être supposé simplement continu mais sans dérivées, alors $u''$ n'existera pas, $u$ et $u'$ existeront toujours, et c'est en général d'eux seulement que nous aurons besoin. C'est un cas très simple d'équation quasi-différentielle.

Si donc

$$\mathrm{L}(u) = \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u,$$

l'adjointe est

$$\mathrm{M}(v) = \frac{d}{dx}(\mathrm{K}\,v') - \mathrm{G}\,v,$$

$$v\,\mathrm{L}(u) - u\,\mathrm{M}(v) = \frac{d}{dx}[\mathrm{K}(vu' - uv')],$$

identité valable même si K n'a pas de dérivée.

Prenons ensuite un système homogène

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{L}(u) = \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0\\ \mathrm{U}_1 = a_1\,u(a) + a_2\,u(b) + a_3\,u'(a) + a_4\,u'(b) = 0\\ \mathrm{U}_2 = b_1\,u(a) + b_2\,u(b) + b_3\,u'(a) + b_4\,u'(b) = 0\end{gathered}}$$

La recherche du système adjoint se fait sans difficulté. Indiquons-la brièvement. On suppose bien entendu $\mathrm{U}_1$ et $\mathrm{U}_2$ indépendantes, c'est-à-dire le Tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

de rang 2 ; posons

$$d_{ij} = a_i b_j - a_j b_i.$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

1° $d_{12} \neq 0$, on prend $U_3$ et $U_4$ arbitrairement, mais tels que $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ soient indépendantes.

On peut prendre évidemment $U_3 = u'(a)$, $U_4 = u'(b)$, car le déterminant des quatre formes est alors $d_{12} \neq 0$.

Ensuite on forme

$$\int_a^b [v\,L(u) - u\,M(v)]\,dx = [K(vu' - uv')]_a^b,$$

et l'on réduit la forme du deuxième membre à

$$U_1 V_4 + U_2 V_3 + U_3 V_2 + U_4 V_1,$$

on trouve ainsi

$$V_1 = \frac{1}{d_{12}}[\quad K(b)\,d_{12}\,v(b) + K(a)\,d_{24}\,v'(a) + K(b)\,d_{14}\,v'(b)],$$

$$V_2 = \frac{1}{d_{12}}[-K(a)\,d_{12}\,v(a) + K(a)\,d_{23}\,v'(a) + K(b)\,d_{13}\,v'(b)].$$

Pour $V_3$ et $V_4$, des expressions analogues mais plus simples.

Alors le système adjoint est

$$\boxed{\begin{array}{c} M(v) = \dfrac{d}{dx}(K v') - G v = 0 \\ V_1(v) = 0 \\ V_2(v) = 0 \end{array}}$$

Pour que le système proposé soit son propre adjoint, il faut et il suffit que les conditions $V_1(v) = 0$, $V_2(v) = 0$ soient *essentiellement les mêmes que* $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, ou autrement dit que $V_1$ et $V_2$ soient des combinaisons linéaires de $U_1$ et $U_2$. Comme $v(a)$ n'entre pas dans $V_1$, en éliminant $u(a)$ dans $U_1$ et $U_2$ et comparant à $V_1$, on a une première condition nécessaire. En éliminant $u(b)$ entre $U_1$ et $U_2$ et comparant à $V_2$, on a une deuxième condition nécessaire. Et ces deux conditions prises ensemble sont nécessaires et suffisantes. Elles se réduisent d'ail-

leurs à l'unique condition

$$(1) \qquad d_{24}\,K(a) = d_{13}\,K(b).$$

2° Si $d_{12} = 0$, plusieurs cas seront à considérer; mais on retrouve toujours la condition précédente pour que le système proposé soit son propre adjoint.

Quelques exemples simples feront bien voir quelles circonstances peuvent se présenter dans la détermination de l'indice d'un système.

Soit, par exemple, l'équation $\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$. Son intégrale générale est $u = A\cos x + B\sin x$.

Si l'on prend les deux conditions indépendantes

$$u(0) - u(2\pi) = 0,$$
$$u'(0) - u'(2\pi) = 0,$$

on n'apporte aucune restriction effective à la solution. L'indice du système est 2 comme celui de l'équation.

Si nous prenons

$$u(0) - u(2\pi) = 0,$$
$$u'(0) + u'(2\pi) = 0,$$

la première ne restreint pas et l'on trouve que l'indice est 1; la solution est $A\cos x$.

Enfin, si l'on prend

$$u(0) + u(2\pi) = 0,$$
$$u'(0) + u'(2\pi) = 0,$$

la seule solution est $u = 0$. Donc, l'indice est zéro.

11. **Nombres caractéristiques.** — En terminant, considérons le cas, qui se présentera souvent dans la suite, où les coefficients du système

$$\boxed{\begin{array}{ll} L(u) = 0 & \\ U_i(u) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

dépendent d'un paramètre $\lambda$; la première question qui se pose est de déterminer pour quelles valeurs de $\lambda$ ce système est compatible, c'est-à-dire a des solutions non identiquement nulles; c'est une question moins précise que la détermination de l'indice.

Si $u_1, \ldots, u_n$ est un système fondamental de solutions de $L(u) = 0$, la condition de compatibilité du système est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} U_1(u_1) & \ldots & U_1(u_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n(u_1) & \ldots & U_n(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de $U_i$ et les solutions $u_i$ sont des fonctions de $\lambda$, on a donc là une équation en $\lambda$

$$F(\lambda) = 0,$$

que nous appellerons *équation caractéristique du système différentiel*. Ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ seront les nombres caractéristiques.

Nous supposerons que les coefficients du système sont continus en $(x, \lambda)$ et analytiques en $\lambda$ dans un certain domaine de Weierstrass, $\mathfrak{D}$. Dans ce cas, $F(\lambda)$ est une fonction analytique de $\lambda$. Ses zéros sont alors isolés dans ce domaine (avec peut-être des points limites sur les frontières du domaine), sauf évidemment si $F(\lambda)$ était identiquement nulle.

Tout nombre caractéristique $\lambda_i$ rend le système compatible. Le système a alors un certain indice $k_i > 0$, tandis que pour tout nombre non caractéristique $k_i = 0$; $k_i$ sera appelé indice de $\lambda_i$.

Un nombre caractéristique $\lambda_i$ a un certain ordre de multiplicité $m_i$ si on le considère comme zéro de $F(\lambda) = 0$, et cet ordre de multiplicité ne dépend pas du système fondamental dont on s'est servi pour former l'équation caractéristique puisqu'un changement de ce système fondamental a pour effet, comme on le constate facilement, de multiplier le premier membre de l'équation caractéristique par une fonction de $\lambda$ sans zéro. Les $m_i$ peuvent différer des $k_i$, mais on a toujours

$$m_i \geqq k_i$$

(on a vu ailleurs que $k_i \leqq n$). Effectivement, soit $k$ l'indice d'un nombre caractéristique $\lambda$; montrons que ce nombre annule

$$F'(\lambda), \quad \ldots, \quad F^{(k-1)}(\lambda).$$

Chacune de ces dérivées est une somme de déterminants dont chacun renferme $n - k + 1$ lignes inaltérées du déterminant $F(\lambda)$, les autres $k - 1$ lignes pouvant avoir été différentiées.

Développons ces déterminants par la formule de Laplace, en prenant les mineurs formés avec ces $n-k+1$ lignes, on voit que tous ces mineurs sont nuls, puisque ce sont des déterminants d'ordre $n-k+1$ issus du déterminant $F(\lambda)$ qui, d'après la définition de l'indice $k$, est de rang $n-k$. On conclut donc que

$$F'(\lambda) = 0, \quad \ldots, \quad F^{(k-1)}(\lambda) = 0.$$

Donc $m \geqq k$.

Exemple :

1° Soit

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0;$$

sa solution générale est

$$u = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Prenons les conditions

$$u(-1) - u(+1) = 0,$$
$$u'(-1) + u'(+1) = 0.$$

Quel que soit $\lambda$, $A \cos \lambda x$ étant paire et sa dérivée impaire sera solution du système. Donc, toute valeur de $\lambda$ sera caractéristique. On trouve, en effet,

$$F(\lambda) \equiv 0.$$

2° Si l'on prenait

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0,$$
$$u(0) = 0,$$
$$u'(0) = 0.$$

D'après le théorème d'existence, la seule solution, quel que soit $\lambda$, est zéro. Il n'y a pas de nombre caractéristique et l'on trouve effectivement

$$F(\lambda) \equiv 1.$$

3°

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0,$$
$$u(0) = 0,$$
$$u(\pi) = 0.$$

Les nombres caractéristiques sont ici $\lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots$, et l'on voit facilement que leurs ordres de multiplicité et leurs indices sont tous égaux à 1.



# CHAPITRE III.

## LES SOLUTIONS RÉELLES ET LEURS ZÉROS DANS LES CAS LES PLUS SIMPLES [1].

**12. Solutions d'une seule équation invariable.** — Nous étudierons dans ce Chapitre les résultats donnés par Sturm dans son premier Mémoire, et certaines extensions de ces résultats. Tout d'abord, envisageons l'équation différentielle homogène

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0;$$

si l'on suppose que ses coefficients sont des fonctions continues (réelles ou complexes) de la variable réelle $x$ dans l'intervalle fermé $\mathrm{A} \leqq x \leqq \mathrm{B}$, il est aisé de voir que *toute solution* $u$, *réelle ou complexe, de cette équation, ne peut avoir une infinité de zéros dans* (A, B) *sans être identiquement nulle*. Car ces zéros admettraient au moins un point limite, $c$, dans $\mathrm{A} \leqq x \leqq \mathrm{B}$; la fonction $u$ étant continue en $c$,

$$u(c) = 0.$$

On sait aussi que $u'(c)$ existe; si on la forme en considérant la valeur de $u$ en $c$ et en un zéro de $u(x)$ qui tend vers $c$, on constate que

$$u'(c) = 0.$$

D'après notre théorème d'existence, $u(x)$ est donc identiquement nulle.

Ceci s'étend aux équations linéaires homogènes d'ordre $n$ à

---

[1] STURM, *Journal des Mathématiques*, t. I, 1836, p. 106. — PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VI. — BÔCHER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. I, 1900, p. 414; t. II, 1901, p. 428; t. III, 1902, p. 196. — PICONE, *Ann. d. R. Scuola Normale sup. di Pisa*, t. XI, 1909, p. 3.

coefficients continus dans $A \leqq x \leqq B$. Les zéros d'une solution [1], s'ils formaient un ensemble infini dans (A, B), auraient un point limite $c$ au moins. En ce point,

$$u(c) = 0, \qquad u'(c) = 0.$$

Mais $u(x)$ étant continue ainsi que sa dérivée, entre deux zéros de $u$ il y en a au moins un de $u'$. Donc, $u'(x)$ a une infinité de zéros admettant $c$ pour point limite. Donc

$$u''(c) = 0.$$

Le raisonnement montre de proche en proche que

$$u(c) = u'(c) = \ldots = u^{(n-1)}(c) = 0.$$

Donc $u$ est identiquement nulle.

Cette propriété, que possède la fonction $u$ d'avoir un nombre fini de zéros dans (A, B), ne s'étend ni aux dérivées $u'(x), u''(x), \ldots$ ni aux solutions des équations non homogènes, comme on le voit par des exemples faciles à construire.

Il existe toutefois *certaines combinaisons de u et de quelques-unes des dérivées successives* $u'$, $u''$, ..., *qui ne peuvent avoir qu'un nombre fini de zéros.*

Par exemple, on démontre [2] que le wronskien de $k$ solutions indépendantes $u_1, \ldots, u_k$ d'une équation linéaire homogène d'ordre $n \geqq k$ ne peut avoir un nombre infini de zéros dans (A, B).

Considérons, dans le cas d'une équation du deuxième ordre,

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0, \tag{1}$$

des fonctions de la forme

$$\Phi = \varphi_1 u - \varphi_2 \mathrm{K} u',$$

$\varphi_1$, $\varphi_2$ étant deux fonctions données de $x$. A quelles conditions $\Phi$ n'aura-t-elle qu'un nombre fini de zéros ? Nous supposerons, pour simplifier, que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ ont des dérivées continues ; il en est alors de même de $\Phi$.

---

(1) Nous supposons dans la démonstration que cette solution est réelle. Une légère modification s'appliquera au cas d'une solution complexe.

(2) Voir *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. VIII, 1901, p. 53.

On a

$$\Phi' = (\varphi_1' - \varphi_2 G)u + (\varphi_1 - \varphi_2' K)u'$$

en tenant compte de (1).

Si $\Phi$ avait une infinité de zéros dans $(A \leqq x \leqq B)$, ces zéros auraient, dans (A, B), au moins un point limite $c$. Alors

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(c) = 0, \\ \Phi'(c) = 0. \end{cases}$$

Or en $c$, si $u$ n'est pas identiquement nulle, on n'a pas à la fois

$$u(c) = 0, \qquad u'(c) = 0.$$

Les deux équations (2) en $u(c)$ et $u'(c)$ ont donc un déterminant nul. Ce déterminant nul donne l'égalité

$$(3) \qquad K\left(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2' + \frac{\varphi_1^2}{K} - G\varphi_2^2\right) = 0 \quad \text{pour} \quad x = c.$$

K est supposé $\neq 0$ dans $(A \leqq x \leqq B)$ pour que (1) ait ses coefficients continus. Donc dans (3) on peut supprimer K et l'on arrive à la conclusion suivante :

« Si $\varphi_1$, $\varphi_2$ sont des fonctions de $x$ à dérivées continues telles que

$$(4) \qquad |\varphi_1\varphi_2| = \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2' + \frac{\varphi_1^2}{K} - G\varphi_2^2,$$

soit 0 dans un intervalle fermé (A, B), on est sûr que $\Phi$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans (A, B) à moins que $u$ ne soit identiquement nulle dans (A, B). »

Premier théorème de Sturm. — Considérons une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients réels, la variable réelle $x$ étant comprise dans l'intervalle $a$, $b$.

Si elle admet une solution réelle $u_1$ qui s'annule au moins deux fois dans $a$, $b$ et si $x_1$, $x_2$ sont deux zéros consécutifs de $u_1$, toute autre solution réelle $u_2$ indépendante de $u_1$ s'annule une fois, et une seule, entre $x_1$ et $x_2$.

Il suffit évidemment de montrer que $u_2$ a un zéro entre $x_1$ et $x_2$, car s'il en avait deux, $u_1$ aurait un troisième zéro entre $x_1$ et $x_2$ qui serait compris entre les deux zéros précédents de $u_2$. Or $u_2$ ne

peut s'annuler en $x_1$ ou $x_2$, car $u_2$ serait alors le produit de $u_1$ par une constante; si $u_2$ était partout $\neq 0$ entre $x_1$ et $x_2$, $\frac{u_1}{u_2}$ serait une fonction continue dans $x_1 \leqq x \leqq x_2$ qui, s'annulant en $x_1$ et $x_2$, aurait sa dérivée nulle en un point compris entre $x_1$ et $x_2$.

Cette dérivée est

$$\frac{u_2 u'_1 - u_1 u'_2}{u_2^2};$$

au facteur $\frac{1}{u_2^2}$ près, c'est le wronskien des deux solutions indépendantes $u_1$, $u_2$ et l'on sait qu'il est $\neq 0$ dans $(a, b)$. Donc, nous avons contradiction, et par suite $u_2$ a au moins un zéro *entre* $x_1$ *et* $x_2$.

On a vu qu'elle ne peut en avoir plus d'un. Nous pouvons résumer ceci en disant que *les zéros des solutions réelles indépendantes d'une équation linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients réels se séparent mutuellement.*

Citons l'exemple de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$$

dont

$$u_1 = \cos x, \qquad u_2 = \sin x$$

sont deux solutions indépendantes.

Les zéros de $u_1$ séparent bien ceux de $u_2$, comme ceux de toute solution $A \cos x + B \sin x$ $(B \neq 0)$ indépendante de $u_1$.

Envisageons la solution imaginaire $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ de cette équation. Elle n'a pas de zéro dans l'intervalle $a$, $b$ de la variable réelle $x$. Si $x$ varie de $a$ à $b$, le point $u = e^{ix}$ du plan de la variable complexe tourne de $e^{ia}$ à $e^{ib}$ sur le cercle de rayon 1 décrit autour de l'origine comme centre. La partie réelle et la partie imaginaire de $e^{ix}$, qui sont des solutions, oscillent entre $-1$ et $+1$, selon un mode connu.

Ce cas particulier est typique, car envisageons le cas général

$$\frac{d}{dx}(K u') - G u = 0.$$

Si $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions réelles quelconques, $u = u_1 + i u_2$ représente la solution complexe la plus générale.

Si $u_1$, $u_2$ sont deux solutions réelles indépendantes, $u$ ne sera pas le produit d'une solution réelle par une constante complexe; nous l'appellerons *solution essentiellement imaginaire.*

Considérons le point dont les coordonnées sont $u_1$, $u_2$; il représente $u = u_1 + iu_2$; $\frac{u_2}{u_1}$ est le coefficient angulaire de $ou$.

Or

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{u_1 u'_2 - u_2 u'_1}{u_1^2}.$$

Le wronskien étant toujours de même signe, puisque jamais nul, le vecteur $ou$ tourne toujours dens le même sens autour de $o$. (Si $u_1$ et $u_2$ étaient proportionnels, $u$ oscillerait sur une droite passant par $o$; c'est un cas limite du précédent, où la trajectoire de $u$ est aplatie suivant une droite passant par $o$.)

Prenons deux solutions essentiellement imaginaires

$$u = u_1 + iu_2, \qquad v = u_3 + iu_4,$$

$u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ étant des solutions réelles, $u_1$ et $u_2$ sont linéairement indépendantes, ainsi que $u_3$ et $u_4$.

Donc on a

$$u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2, \qquad u_4 = \gamma u_1 + \delta u_2 \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant en outre réels.

Dans le plan de la variable complexe $u$ on passe de $u$ à $v$ par la substitution linéaire précédente qui porte le nom d'*affinité*. Cette transformation change les droites en droites et multiplie toutes les aires par la même quantité $(\alpha\delta - \beta\gamma)$. En particulier, une droite issue de l'origine est changée en une droite issue de l'origine $o$. Si le rayon vecteur $ou$ fait un certain nombre de tours autour de $o$, le rayon vecteur $ov$ en fait un nombre égal. D'une façon plus précise, si l'on considère $x$ comme le temps, et si l'on cherche la vitesse aréolaire par rapport à $o$ du mobile qui représente la solution $u = u_1 + iu_2$, on voit que cette vitesse est

$$\frac{ds}{dx} = u_1 u'_2 - u_2 u'_1,$$

c'est le wronskien des deux fonctions $u_1$, $u_2$.

Quand on passe de la solution $u$ à la solution $v$, ce wronskien

est simplement multiplié par $\alpha\delta - \beta\gamma$, ce qui n'a rien d'étonnant puisque les aires sont toutes multipliées par ce nombre. En particulier, si $u$ fait moins qu'un demi-tour autour de $o$, lorsque $x$ décrit l'intervalle (A, B), $v$ fera moins qu'un demi-tour et il en résulte alors que dans (A, B) aucune solution réelle (représentée par la projection sur $ox$, ou sur $oy$ du vecteur $ou$) ne pourra s'annuler plus d'une fois. L'équation différentielle est dite alors *non oscillatoire* dans l'intervalle (A, B). Nous reviendrons ultérieurement sur la question de reconnaître si une équation donnée est oscillatoire ou non dans un intervalle donné.

Après ces brèves indications sur les solutions complexes, revenons aux solutions réelles d'une équation à coefficients réels. On a vu que, si l'on considère $\Phi = \varphi_1 u - \varphi_2 K u'$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ ayant des dérivées continues telles, en outre, que

$$\left| \varphi_1 \varphi_2 \right| = \varphi_1' \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2' + \frac{\varphi_1^2}{K} - G\varphi_2^2,$$

soit $\neq 0$ dans (A, B), cette expression $\Phi$ n'a qu'un nombre limité de zéros dans (A, B).

Prenons deux telles fonctions $\Phi_1$ et $\Phi_2$ formées : la première avec une solution $u_1$, la deuxième avec une solution $u_2$ indépendante de $u_1$ ($u_1$, $u_2$ et $\varphi_1$, $\varphi_2$ étant réelles)

$$\Phi_1 = \varphi_1 u_1 - \varphi_2 K u_1', \qquad \Phi_2 = \varphi_1 u_2 - \varphi_2 K u_2' \qquad \left| \varphi_1 \varphi_2 \right| \neq 0;$$

$\Phi_1$ et $\Phi_2$ n'auront qu'un nombre limité de zéros dans (A, B). Dans ces conditions, *le premier théorème de Sturm sur les zéros des deux solutions $u_1$, $u_2$ indépendantes s'étend aux zéros de $\Phi_1$, $\Phi_2$. Entre deux zéros consécutifs de $\Phi_1$, il y en a un et un seul de $\Phi_2$.*

La démonstration donnée pour $u_1$ et $u_2$ s'applique ici presque sans changement.

On trouve de la même manière que, si $u$ est une solution essentiellement imaginaire de (1), le vecteur qui représente la quantité $\varphi_1 u - \varphi_2 K u'$ tournera toujours dans le même sens lorsque $x$ augmente depuis A jusqu'à B pourvu que $\left| \varphi_1, \varphi_2 \right| \neq 0$.

On peut encore, sur ces expressions $\Phi$, se proposer une autre question.

Prenons une solution réelle, non identiquement nulle de

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0.$$

Prenons quatre fonctions réelles

$$\varphi_1 \varphi_2, \qquad \psi_1 \psi_2,$$

et formons

$$\Phi = \varphi_1 u - \varphi_2 \mathrm{K}u', \qquad \Psi = \psi_1 u - \psi_2 \mathrm{K}u'.$$

Peut-on donner quelques résultats sur les zéros de $\Phi$ et de $\Psi$ ? Tout d'abord, nous supposerons que ces zéros sont en nombre fini et pour cela que $|\varphi_1, \varphi_2|$ et $|\psi_1, \psi_2|$ sont $\neq 0$ dans $(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

Remarquons ensuite que $\mathrm{K}u'$ et $u$, qui sont des formes particulières de $\Phi$ et $\Psi$, vérifiant une équation homogène de Riccati, c'est-à-dire une équation de la forme

$$\omega_1 \omega_2' - \omega_2 \omega_1' = \mathrm{A}\omega_1^2 + \mathrm{B}\omega_1\omega_2 + \mathrm{C}\omega_2^2,$$

on peut penser qu'il en est de même de $\Phi$ et $\Psi$. Et, en effet, on a identiquement

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} \Phi(\psi_1 u - \psi_2 \mathrm{K}u') - \Psi(\varphi_1 u - \varphi_2 \mathrm{K}u') = 0 \\ \quad \text{ou bien} \\ \quad (\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi) u - (\psi_2 \Phi - \varphi_2 \Psi) \mathrm{K}u' = 0. \end{array}\right.$$

En différentiant et tenant compte de l'équation que vérifie $u$, on a

$$(6) \quad \begin{aligned} &(\psi_1 \Phi' - \varphi_1 \Psi' + \psi_1' \Phi - \varphi_1' \Psi - \mathrm{G}\psi_2 \Phi + \mathrm{G}\varphi_2 \Psi) u \\ &+ [\psi_1 \Phi - \varphi_1 \Psi - (\psi_2' \Phi - \varphi_2' \Psi + \psi_2 \Phi' - \varphi_2 \Psi')\mathrm{K}] u' = 0. \end{aligned}$$

(5) et (6) sont deux équations linéaires et homogènes en $u$ et $u'$. Si $u$ n'est pas identiquement nul, on n'a pas à la fois en un point $u = 0$, $u' = 0$; donc le déterminant de ces deux équations est identiquement nul. Ceci fournit *une équation homogène de Riccati pour* $\Phi$ *et* $\Psi$

$$(7) \quad \begin{aligned} &(\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1)(\Phi' \Psi - \Phi \Psi') + |\psi_1 \psi_2| \Phi^2 \\ &- \left[\varphi_2 \psi_1' - \varphi_2' \psi_1 + \varphi_1' \psi_2 - \varphi_1 \psi_2' + 2\frac{\varphi_1 \psi_1}{\mathrm{K}} - 2\mathrm{G}\varphi_2 \psi_2\right] \Phi\Psi + |\varphi_1 \varphi_2| \Psi^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour que cette équation soit régulière dans $(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ on voit qu'une

condition nécessaire est que

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0 \qquad \text{dans} \qquad (A, B).$$

Si cette condition est réalisée, $\Phi$ et $\Psi$ ne pourront s'annuler au même point, car $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ étant le déterminant des deux équations en $u$ et $Ku'$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, on aurait en ce point $u = 0$, $u' = 0$, ce qui est absurde.

Avant de passer à l'étude des zéros de $\Phi$ et $\Psi$, remarquons qu'en un point où $\Phi$ s'annule, $\Psi$ n'étant pas nul, on a d'après (7)

$$\text{(I)} \qquad \Phi' = -\frac{\left|\varphi_1\varphi_2\right|}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\Psi$$

et de même, en un point où $\Psi = 0$, on a

$$\text{(II)} \qquad \Psi' = \frac{\left|\psi_1\psi_2\right|}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\Phi.$$

Ceci posé, on peut montrer que : *entre deux zéros consécutifs de* $\Phi$, *il y a un zéro et un seul de* $\Psi$, *et réciproquement.*

En effet, tout d'abord dans tout segment de (A, B) où $\Psi \neq 0$, $\Phi$ ne peut s'annuler plus d'une fois. En effet, si $\Phi$ s'annulait au moins deux fois, en deux points consécutifs $x_1$, $x_2$ d'après (I), $\Phi'$ aurait même signe puisque ni $\Psi$, ni $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ne s'annulent. Ceci est évidemment impossible.

Réciproquement, dans tout segment où $\Phi$ reste $\neq 0$, $\Psi$ ne peut s'annuler plus d'une fois.

Supposons maintenant que $\Phi$ admette plusieurs zéros dans (A, B), soient $x_1, x_2$ deux tels zéros consécutifs. $\Psi$ s'annule au moins une fois entre $x_1$ et $x_2$, car dans le cas contraire l'intervalle $x_1$, $x_2$ serait compris dans un intervalle un peu plus grand où $\Psi$ serait différent de zéro, et dans cet intervalle $\Phi$ ne pourrait avoir deux zéros. Donc $\Psi$ a au moins un zéro *entre* $x_1$ et $x_2$ et, d'après un raisonnement connu, il n'en a qu'un.

*Voilà donc un cas :*

$$\text{dans (A, B)}, \qquad \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0, \qquad \left|\varphi_1\varphi_2\right| \neq 0, \qquad \left|\psi_1\psi_2\right| \neq 0$$

*où les zéros de* $\Phi$, $\Psi$ *se séparent.*

Ce théorème n'a pas de sens si ni $\Phi$ ni $\Psi$ n'ont plus d'un zéro dans (A, B).

Voici un cas où cette circonstance se produit :

THÉORÈME. — *Si aux conditions*

$$\text{dans (A, B)}, \qquad \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \neq 0, \qquad |\varphi_1\varphi_2| \neq 0, \qquad |\psi_1\psi_2| \neq 0$$

*on ajoute la condition que* $|\varphi_1\varphi_2|$ *et* $|\psi_1\psi_2|$ *soient de signes contraires, ni* $\Phi$ *ni* $\Psi$ *ne peuvent s'annuler plus d'une fois dans* (A, B), *et de plus, si l'une de ces fonctions s'annule une fois, l'autre ne s'annulera pas.*

Autrement dit, considérons le produit $\Phi\Psi$; ses zéros sont ceux de $\Phi$ et de $\Psi$. D'après le théorème démontré ci-dessus, deux zéros consécutifs de ce produit sont, l'un, zéro de $\Phi$, l'autre, zéro de $\Psi$. Le théorème actuel dit que, dans les conditions précédentes, *le produit* $\Phi\Psi$ *n'a qu'un zéro dans* (A, B).

En effet, s'il en avait plusieurs, en considérant deux zéros consécutifs, l'un appartiendrait à $\Phi$ et l'autre à $\Psi$; nous allons montrer qu'en ces points la dérivée

$$\frac{d}{dx}(\Phi\Psi) = \Phi'\Psi + \Phi\Psi'$$

a le même signe. Cette contradiction démontrera notre théorème.

Pour le premier zéro, l'expression $\frac{d}{dx}(\Phi\Psi)$ prend, d'après (I), la valeur

$$\frac{-|\varphi_1\varphi_2|}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\Psi^2$$

et pour le zéro consécutif sa valeur est, d'après (II),

$$\frac{|\psi_1\psi_2|}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\Phi^2.$$

Ces deux valeurs sont de même signe puisque

$$|\varphi_1\varphi_2| \times |\psi_1\psi_2| < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

APPLICATION. — *Si l'on prend* $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0$, *on a* $\Psi = u$, *et nous obtenons le résultat suivant :*

« S'il existe une fonction $\varphi$, à dérivée continue, telle que

$$\varphi' + \frac{\varphi^2}{K} - G < 0,$$

ni une solution $u$ non identiquement zéro de l'équation

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K} > 0,$$

ni la fonction $\varphi u - \mathrm{K}u'$ ne peuvent avoir plus d'un zéro dans (A, B). »

L'équation est donc non oscillatoire.

En donnant à $\varphi$ des formes particulières, on a diverses conditions suffisantes pour qu'une équation soit non oscillatoire. Citons la condition $\mathrm{G} > 0$ qu'on obtient en faisant $\varphi = 0$ et qui est bien connue. Nous retrouverons plus loin ces conditions de non-oscillation.

13. **Effet produit sur les solutions par un changement des coefficients de l'équation.** — Après avoir ainsi étendu dans diverses directions les propriétés des zéros des solutions réelles, revenons à ces zéros eux-mêmes, pour étudier l'effet que produit sur eux un changement des fonctions G ou K.

*Laissons d'abord* K *invariable. Alors toute diminution de* G *augmente la rapidité d'oscillation des solutions de l'équation.* La démonstration va éclaircir le sens de cet énoncé.

Considérons $u_1$ solution de

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u'_1) - \mathrm{G}_1 u_1 = 0$$

et $u_2$ solution de

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u'_2) - \mathrm{G}_2 u_2 = 0.$$

$\mathrm{G}_2$ est supposé $< \mathrm{G}_1$ et ni $u_1$ ni $u_2$ ne sont identiquement nulles. En combinant les deux équations précédentes multipliées par $u_2$ et $-u_1$, on a

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{K}(u'_1 u_2 - u_1 u'_2)] = (\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2) u_1 u_2;$$

d'où, par intégration,

$$(1) \qquad [\mathrm{K}(u'_1 u_2 - u_1 u'_2)]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2) u_1 u_2 \, dx.$$

Cette formule, donnée par Sturm, peut être considérée comme un cas particulier de la formule de Green.

Supposons que $u_1$ ait plusieurs zéros dans (A, B) et soient $x_1$, $x_2$ deux de ses zéros consécutifs. Dire que $u_2$ oscille plus vite que $u_1$ c'est dire que toute solution $u_2$ de la deuxième équation a au moins un zéro ENTRE $x_1$ ET $x_2$ distinct de $x_1$ et $x_2$.

Effectivement, si cela n'était pas, on pourrait supposer $u_1$ et $u_2$ positifs *entre* $x_1$ *et* $x_2$. Alors $G_1 - G_2$ étant $> 0$, l'intégrale dans la formule précédente serait $> 0$.

Or, en $x_1$ et $x_2$, $u_1 = 0$, $u'_1$ est $> 0$ en $x_1$ et $< 0$ en $x_2$ et non pas $= 0$ puisque $u_1$ n'est pas $\equiv 0$. Donc le premier membre de la formule précédente est $\leqq 0$; ce fait est contradictoire avec le résultat précédent. Donc $u_2$ s'annule au moins une fois entre $x_1$ et $x_2$.

Le terme, *oscillation plus rapide de* $u_2$, s'explique très bien, car si l'on considère une solution $u_1$ de la première et une solution $u_2$ de la deuxième équation qui s'annulent toutes deux en $x$, le zéro de $u_2$ qui suit $x$ se présentera avant le zéro suivant de $u_1$, en sorte que la demi-oscillation de $u_2$ est plus rapide que celle de $u_1$.

Supposons maintenant que K et G changent. Considérons les deux équations

$$\frac{d}{dx}(K_1 u'_1) - G_1 u_1 = 0, \qquad \frac{d}{dx}(K_2 u'_2) - G_2 u_2 = 0,$$

où

$$G_1 > G_2, \qquad K_1 > K_2 > 0.$$

Il est aisé de voir que *la diminution de* K *et de* G *produit une oscillation plus rapide des solutions, autrement dit : entre deux zéros consécutifs d'une solution quelconque* $u_1$ *de la première, il y a au moins un zéro de toute solution* $u_2$ *de la deuxième équation.*

Nous donnerons de ce fait une démonstration basée sur une formule de Sturm, modifiée par M. Picone.

Des identités

$$\frac{d}{dx}(K_1 u_2 u'_1) = u_2 \frac{d}{dx}(K_1 u'_1) + K_1 u'_2 u'_1 = G_1 u_1 u_2 + K_1 u'_2 u'_1$$

et

$$\frac{d}{dx}(K_2 u_1 u'_2) = G_2 u_1 u_2 + K_2 u'_2 u'_1$$

on déduit

$$\frac{d}{dx}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2) = (G_1 - G_2) u_1 u_2 + (K_1 - K_2) u'_1 u'_2.$$

Cette formule a été donnée par Sturm et généralise immédiatement le cas que nous avons traité plus haut où $K_1 = K_2$. Mais le raisonnement que nous avons fait pour $K_1 = K_2$ ne convient plus ici à cause de la présence du facteur $u'_1\ u'_2$; on établit alors la formule suivante

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2)\right] = \frac{u_1}{u_2}[(G_1 - G_2) u_1 u_2 + (K_1 - K_2) u'_1 u'_2]$$
$$+ \frac{u'_1 u_2 - u_1 u'_2}{u_2^2}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2),$$

d'où l'on tire l'identité de M. Picone

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}(K_1 u_2 u'_1 - K_2 u_1 u'_2)\right]$$
$$= (G_1 - G_2) u_1^2 + (K_1 - K_2) u'^2_1 + K_2\left[u'_1 - u'_2\,\frac{u_1}{u_2}\right]^2.$$

Cette formule s'applique évidemment en tout point où $u_2 \neq 0$. Si l'on suppose alors qu'entre $x_1$, $x_2$, zéros consécutifs de $u_1$, ainsi qu'en $x_1$ et $x_2$, $u_2$ soit $\neq 0$, et qu'on intègre les deux membres de $x_1$ à $x_2$, puisque $K_1$ et $K_2$ sont $> 0$ dans $x_1\ x_2$ ainsi que $K_1 - K_2$ et $G_1 - G_2$, le deuxième membre donne une intégrale positive, et le premier membre donne une intégrale nulle, la contradiction démontre le théorème.

La formule s'applique encore si $u_2$ s'annule en $x_1$ ou $x_2$ si en un tel point $u_1$ s'annule aussi, car alors $\frac{u_1}{u_2}$ tend vers la valeur $\frac{u'_1}{u'_2}$ qui est bien déterminée [1], puisque $u_2$ n'étant pas identiquement nul, $u'_2$ n'est pas nul. Le premier membre donne alors dans l'intégration entre $x_1$ et $x_2$ une quantité bien déterminée ainsi que le troisième terme du deuxième membre, et l'intégration encore correcte prouve l'exactitude de notre théorème.

On peut encore l'étendre au cas où l'on a

$$G_2 \leqq G_1, \qquad K_2 \leqq K_1,$$

---

[1] Quand $x$ tend vers $x_1$ par valeurs supérieures ou vers $x_2$ par valeurs inférieures.

à condition, bien entendu, que l'égalité n'ait pas lieu en tous les points de l'intervalle $x_1\,x_2$. Il y a ici, toutefois, un cas d'exception qu'il convient de signaler.

Nous nous sommes servis de l'identité de Picone

$$\left[u_1^2\left(K_1\frac{u_1'}{u_1}-K_2\frac{u_2'}{u_2}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}(G_1-G_2)u_1^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(K_1-K_2)u_1'^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}K_2\left(\frac{u_1'u_2-u_1u_2'}{u_2^2}\right)^2dx.$$

En supposant, dans AB, $G_1 \geqq G_2$, $K_1 \geqq K_2$, les signes d'égalité n'ayant pas lieu en tout point de $x_1\,x_2$, nous avons dit qu'en général le deuxième membre a une valeur positive non nulle.

En effet, si dans une partie de l'intervalle $G_1 > G_2$, la première intégrale est sûrement positive; si dans $x_1\,x_2$ on a $G_1 \equiv G_2$, alors il peut arriver que dans une partie de l'intervalle $x_1\,x_2$ on ait $K_1 - K_2 = 0$ et dans le reste $u_1' = 0$, en sorte que la deuxième intégrale soit nulle. Mais cela ne peut arriver que si

$$\frac{d}{dx}(K_1 u') - G_1 u = 0$$

admet une solution constante mais non nulle dans cet intervalle partiel, ce qui exigerait $G_1 \equiv 0$ dans cette partie de $x_1\,x_2$. Et en effet si $G_1 \equiv 0$ dans une partie de $x_1\,x_2$, il y a une solution $u_1$ constante dans cette partie. Evidemment, si K diminue, cette constante solution particulière reste invariable. On pourrait ainsi facilement construire un exemple où la diminution de K n'altérerait pas l'oscillation des solutions, ce qui ferait exception au résultat que nous avons plus haut.

Pour écarter ces cas exceptionnels nous supposerons que l'identité $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ ne doit être vérifiée dans aucune partie de AB [1].

Avec ces précautions, la diminution de G et de K produit bien une oscillation plus rapide des solutions, comme nous l'avons dit plus haut.

*Application.* — Ce théorème permet de comparer les solutions de deux équations différentielles dont les coefficients ont entre

(1) Des restrictions bien moindres seraient suffisantes ici.

eux des relations simples. En particulier on peut déduire des conditions pour qu'une équation soit non oscillatoire.

Soit en effet l'équation

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0;$$

comme toujours K est supposé $> 0$, $x$ étant compris dans AB. Soient min K et min G le minimum de K et celui de G dans l'intervalle fermé AB et considérons l'équation

$$\frac{d}{dx}[(\min \mathrm{K})u'] - (\min \mathrm{G})u = 0$$

ou

$$(2) \qquad u'' - \frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}} u = 0.$$

(2) s'intégre de suite.

Si $\min \mathrm{G} > 0$, on a la solution exponentielle $e^{\sqrt{\frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}}}x}$, c'est une solution réelle toujours $\neq 0$ dans AB. Donc (1) n'a pas de solution s'annulant deux fois. Il en est de même si $\min \mathrm{G} = 0$.

Si donc G est partout $\geqq 0$, l'équation (1) est non oscillatoire.

Si $\min \mathrm{G} < 0$, les deux solutions fondamentales de (2) sont

$$u = \sin\left(\sqrt{-\frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}}}\,x\right)$$

et

$$u = \cos\left(\sqrt{-\frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}}}\,x\right).$$

Elles oscillent : cependant on peut former une solution de (2) qui soit différente de zéro dans un intervalle $ab$ de AB, à condition que l'intervalle $ab$ soit inférieur à

$$\frac{\pi}{\sqrt{-\frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}}}}.$$

Si donc on a

$$-\frac{\min \mathrm{G}}{\min \mathrm{K}} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

l'équation (1) est non oscillatoire dans $ab$.

On a d'une façon analogue comme condition certaine d'oscil-

lation dans $ab$ :

$$-\frac{\max G}{\max K} \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

ce qui implique $\max G < 0$.

Cette condition suffisante peut même s'étendre ; si

$$-\frac{\max G}{\max K} \geqq \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2},$$

toute solution de l'équation a au moins $k$ zéros dans l'intervalle fermé $a \leqq x \leqq b$. Ces résultats sont souvent utilisés dans les applications.

Signalons, en passant, un cas spécial envisagé par Sturm et Liouville ; c'est celui de l'équation

$$\frac{d}{dx}(ku') + (\lambda g - l)u = 0,$$

$k$, $g$, $l$ sont des fonctions de $x$ continues dans l'intervalle AB. $k > 0$, $g > 0$, $l \geqq 0$.

Cette équation est fournie par l'étude du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, ou des vibrations simples des cordes hétérogènes.

Si $\lambda$ varie, $k$ reste invariable, mais $G = l - \lambda g$ varie ; si $\lambda$ augmente, G diminue, les solutions oscillent plus rapidement.

On peut ne pas supposer $g > 0$ et admettre $g \geqq 0$. Pour simplifier, nous nous bornons à $g > 0$. La condition $l \geqq 0$ fournie par le problème physique est superflue, puisqu'elle n'intervient en rien dans la variation de $G = l - \lambda g$.

Un autre cas envisagé depuis Sturm par divers géomètres, et avec des méthodes différentes, est celui où $k > 0$, $l \geqq 0$, mais où *$g$ change de signe dans* AB.

On a cru ce cas essentiellement distinct du précédent. Il n'en est rien. Si nous divisons par $|\lambda|$ l'équation s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{|\lambda|}u'\right) + \left[g(\operatorname{sgn}\lambda) - \frac{l}{|\lambda|}\right]u = 0 \qquad \operatorname{sgn}\lambda = \begin{cases} +1 & \text{si } \lambda > 0 \\ -1 & \text{si } \lambda < 0 ; \end{cases}$$

si l'on pose

$$K = \frac{k}{|\lambda|}, \qquad G = \frac{l}{|\lambda|} - (\operatorname{sgn}\lambda)g,$$

on voit que l'équation est du type de celles que nous avons étudié dans les précédents paragraphes.

1° Si $\lambda > 0$, $\lambda$ croissant G décroît en général et K aussi; c'est le cas de Sturm où K et G décroissent. Si $l \equiv 0$, G ne varie pas mais K décroît certainement.

Donc les solutions oscillent plus vite.

2° $\lambda < 0$, si $|\lambda|$ croît, même résultat.

Nous trouvons donc, comme simple corollaire des résultats de Sturm, les circonstances qui se produisent dans ce cas particulier.

**14. Les théorèmes de comparaison.** — Considérons le système suivant qui comporte deux conditions à un point

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ u(a) = \alpha \\ u'(a) = \alpha' \end{gathered}}$$

Avec la condition $|\alpha| + |\alpha'| > 0$, nous excluons le cas où la solution $u$, qui est unique, serait identiquement nulle. Le problème fondamental qui se pose est d'étudier *comment varient les zéros de la solution $u$, quand* K *et* G *changent.*

Disons tout d'abord un mot d'un point de vue un peu différent auquel on pourrait se placer dans une telle étude. Si l'on considère le système

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \end{gathered}}$$

la condition supplémentaire exprimant que, pour la valeur $a$ de $x$, $u$ et $u'$ sont proportionnels à $\alpha$ et $\alpha'$, les solutions de ce deuxième système se déduisent de la solution du système initial en la multipliant par une constante arbitraire, ce qui ne change rien à ses zéros; en sorte que l'étude des zéros des solutions du deuxième système est identique à la même étude faite pour le premier.

Considérons donc deux systèmes

(1) $$\begin{array}{|c|}\hline \dfrac{d}{dx}(K_1 u') - G_1 u = 0 \\ u(a) = \alpha_1 \\ u'(a) = \alpha'_1 \\ \hline \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{|c|}\hline \dfrac{d}{dx}(K_2 u') - G_2 u = 0 \\ u(a) = \alpha_2 \\ u'(a) = \alpha'_2 \\ \hline \end{array}$$

où nous supposons $K_1 \geqq K_2$, $G_1 \geqq G_2$; afin que leurs solutions ne soient pas identiquement nulles nous supposerons

$$|\alpha_1| + |\alpha'_1| \neq 0, \qquad |\alpha_2| + |\alpha'_2| \neq 0.$$

De plus l'égalité $K_1 = K_2$, $G_1 = G_2$ n'a pas lieu en tout point d'une partie de l'intervalle $ab$ et l'identité $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ ne doit avoir lieu dans aucune partie de cet intervalle.

Enfin sur les $\alpha$ et $\alpha'$ nous ferons les hypothèses suivantes :

Si $\alpha_1 \neq 0$, alors $\alpha_2$ devra être $\neq 0$ et tel que $\dfrac{K_1(a)\alpha'_1}{\alpha_1} \geqq \dfrac{K_2(a)\alpha'_2}{\alpha_2}$, c'est-à-dire que $\dfrac{K(a)\alpha'}{\alpha}$ diminue en passant de (1) à (2).

Si $\alpha_1 = 0$, nous ne faisons aucune hypothèse supplémentaire.

Sous ces hypothèses, Sturm établit ses deux *théorèmes de comparaison*.

Premier théorème de comparaison. — *Si la solution $u_1$ de (1) a un certain nombre de zéros distincts de $a$ dans l'intervalle $ab$ ($a < x \leqq b$), la solution $u_2$ aura au moins autant de zéros dans cet intervalle, et en numérotant $x_1 x_2 x_3 \ldots$ les zéros de $u_1$ dans l'ordre de grandeur croissante, $x'_1 x'_2 x'_3 \ldots$ ceux de $u_2$ on aura toujours*

$$x'_k < x_k$$

*pour toute valeur de $k$ correspondant à un zéro de $u_1$ et $u_2$.*

D'après un résultat obtenu au paragraphe précédent, on sait que $u_2$ a un zéro au moins entre $x_1$ et $x_2$, entre $x_2$ et $x_3$, etc. Il

reste à démontrer que $u_2$ a au moins un zéro entre $a$ et $x_1$. Si l'on avait

$$u_1(a) = \alpha_1 = 0,$$

on serait sûr que $u_2$ a au moins un zéro entre $a$ et $x_1$ d'après les résultats que nous venons de mentionner.

Supposons donc $\alpha_1 \neq 0$. Si $u_2$ n'avait aucun zéro entre $a$ et $x_1$, la formule de M. Picone entre ces limites donnerait, puisque $u_2(a) \neq 0$,

$$\left[u_1^2\left(\frac{K_1 u_1'}{u_1} - \frac{K_2 u_2'}{u_2}\right)\right]_a^{x_1}$$
$$= \int_a^{x_1} (G_1 - G_2) u_1^2 \, dx + \int_a^{x_1} (K_1 - K_2) u_1'^2 \, dx + \int_a^{x_1} K_2 \frac{(u_1' u_2 - u_1 u_2')^2}{u_2^2} dx.$$

L'une au moins des deux premières intégrales du deuxième membre est $> 0$ et $\neq 0$.

Le crochet dans le premier membre est $= 0$ pour la limite supérieure puisque $u_1$ s'y annule, il est $\geqq 0$ pour la limite inférieure, en vertu de l'hypothèse

$$\frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} \geqq \frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}.$$

Donc le premier membre est $\leqq 0$. Le deuxième est sûrement $> 0$. Il y a donc contradiction et le théorème est démontré.

Deuxième théorème de comparaison. — *Sous les mêmes hypothèses, si* $u_1(b) \neq 0$, et $u_2(b) \neq 0$,

$$\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}$$

*pourvu que les solutions* $u_1$ *de* (1) *et* $u_2$ *de* (2) *aient le même nombre de zéros entre* $a$ *et* $b$ (cette restriction est effective, car $u_2$ peut avoir plus de zéros que $u_1$ entre $a$ et $b$).

1° Supposons d'abord que $u_1$ et $u_2$ n'aient aucun zéro dans $(ab)$. On peut alors se servir de l'identité de M. Picone, entre les limites $a$ et $b$. Le deuxième membre est positif; si l'on n'avait pas

$$\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}$$

le premier membre serait négatif ou nul d'après les hypothèses faites.

2° Supposons que $u_1$ et $u_2$ aient $n$ zéros entre $a$ et $b$, soit $x_n$ le dernier de ces zéros, c'est sûrement un zéro de $u_1$ (1er théorème de comparaison). On peut appliquer la formule de M. Picone entre $x_n$ et $b$. Le deuxième membre est $> 0$. Le crochet du premier est nul à la limite inférieure, il faut donc, pour éviter toute contradiction, que l'inégalité à démontrer soit vraie.

Voici quelques conséquences des théorèmes de comparaison. Soit le système

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \\ u(a) = \alpha \\ u'(a) = \alpha' \end{cases}$$

où K, G, $\alpha$, $\alpha'$ dépendent du paramètre $\lambda$

$$|\alpha| + |\alpha'| > 0.$$

Supposons que $\lambda$ variant dans un intervalle $\Lambda_1 \Lambda_2$ (où l'on peut avoir $\Lambda_1 = -\infty$ ou $\Lambda_2 = +\infty$) K et G soient des fonctions continues de $x$ et $\lambda$. Alors la solution $u$ de ce système et sa dérivée $u'$ seront des fonctions continues de $x$ et $\lambda$.

1° Les zéros de $u$ seront aussi des fonctions continues de $\lambda$ sauf peut-être ceux qui se trouvent à l'une ou l'autre extrémité de l'intervalle $ab$. Il n'y a là au fond autre chose que le théorème classique sur la continuité des fonctions implicites, puisque $u$ et $u'$ ne sont jamais nuls à la fois. Il est vrai que nous ne sommes pas assuré de l'existence de la dérivée $\frac{du}{d\lambda}$, mais on peut facilement donner la démonstration sans faire usage de cette dérivée ([1]).

2° Supposons que, $\lambda$ croissant de $\Lambda_1$ à $\Lambda_2$, K et G décroissent ou restent constants pour chaque valeur de $x$. Pour éviter le cas d'exception signalé plus haut, supposons que, même dans une partie de l'intervalle $ab$, K et G ne sont pas tous les deux indépendants de $\lambda$ pour aucune valeur de $\lambda$, et que si G est indépendant de $\lambda$ dans un tel intervalle, il n'y doit pas être identiquement

([1]) *Voir*, par exemple OSGOOD, *Funktionentheorie*, Chapitre II, paragraphe 4.

zéro. Supposons enfin que $\alpha$ est ou bien identiquement zéro, ou bien qu'il ne s'évanouit nulle part dans $\Lambda_1 \Lambda_2$, et, dans ce dernier cas, que $\frac{K\alpha'}{\alpha}$ décroît ou reste constant pour chaque valeur de $\lambda$.

On déduit alors des théorèmes de comparaison que les zéros de $u(x)$ vont en décroissant et, d'autre part, que $\frac{K(b)\,u'(b)}{u(b)}$ va en décroissant tant que le nombre de zéros entre $a$ et $b$ restera constant.

Il est bon, pour fixer les idées, de définir, dans cette étude, des zéros en fonctions de $\lambda$, K et G hors de l'intervalle $ab$, ce qui ne change rien à la nature des solutions dans l'intervalle $ab$. On prendra pour cela un nombre $b' > b$.

Pour $x > b'$ on choisira $K = 1$ ; entre $b$ et $b'$, K variera linéairement depuis $K(b)$ jusqu'à la valeur 1 ; K est alors une fonction toujours positive dans $(a, +\infty)$ ; $\lambda$ croissant, elle ne sera jamais croissante.

De même, G sera pris égal à $-1$, de $b'$ à $+\infty$, et variera linéairement entre $b$ et $b'$ de $G(b)$ jusqu'à $-1$.

Dans ces conditions, pour $x > b'$ l'équation se réduira à

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$$

dont les solutions fondamentales sont $\sin x$ et $\cos x$.

La solution $u$ du système proposé sera donc oscillatoire et aura une infinité de zéros pour $x > b'$. $\lambda$ variant, ces zéros seront des fonctions continues de $\lambda$.

On a vu que si (¹)

$$\frac{-\max G}{\max K} = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

pour une certaine valeur de $\lambda$, la solution du système, étant solution de l'équation différentielle de ce système, a au moins $k$ zéros dans $ab$. Si donc on ajoute aux hypothèses la suivante : lorsque $\lambda$ variant de $\Lambda_1$ à $\Lambda_2$

$$\lim_{\lambda=\Lambda_2} \frac{-\max G}{\max K} = +\infty,$$

(¹) N'oublions pas qu'ici max G et max K désignent, $\lambda$ étant fixé, le maximum de G et de K quand $x$ varie de $a$ à $b$ : maximums qui dépendent évidemment de $\lambda$.

on voit que si $\lambda$ est pris assez voisin de $\Lambda_2$ la solution aura autant de zéros qu'on voudra dans $(ab)$.

Nous supposons dans ce qui suit que cette condition est satisfaite.

**15. Les théorèmes d'oscillation de Sturm.** — Faisons alors varier $\lambda$ de $\Lambda_1$ à $\Lambda_2$.

Si $\lambda$ part de $\Lambda_1$ (ou si $\Lambda_1 \Lambda_2$ est un intervalle ouvert, d'une valeur arbitrairement voisine de $\Lambda_1$), la solution $u$ aura un nombre $m$ de zéros *entre* $a$ et $b$, les extrémités $a$, $b$ étant exclues. Si $\lambda$ croît jusqu'à $\Lambda_2$, ce nombre doit augmenter indéfiniment; donc, pour une certaine valeur $\mu_m$ de $\lambda$, la solution $u$ acquiert un nouveau zéro en $b$, zéro qui entrera dans $ab$ pour $\lambda > \mu_m$; un nouveau zéro se présentera en $b$ pour une valeur $\mu_{m+1} > \mu_m$ de $\lambda$ et ainsi de suite, nous aurons une suite de valeurs $\mu_m$, $\mu_{m+1}$, ..., ayant $\Lambda_2$ pour point limite: $\lambda$ étant entre $\mu_m$ et $\mu_{m+1}$, la solution aura $m+1$ zéros entre $a$ et $b$: elle en aura $m+2$ si $\lambda$ est entre $\mu_{m+1}$ et $\mu_{m+2}$, ....

De plus, lorsque $\lambda$ varie entre $\mu_i$ et $\mu_{i+1}$, la quantité $\frac{K(b)\,u'(b)}{u(b)}$, qui est toujours décroissante, doit nécessairement décroître de $+\infty$ à $-\infty$ puisque, en $\mu_i$ et $\mu_{i+1}$, $u(b) = 0$ sans que $u'(b) = 0$.

Ceci étant posé, on peut rechercher pour quelles valeurs de $\lambda$ (nombres caractéristiques) le système

$$(1)\qquad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \end{array}}$$

est compatible; $\beta$ et $\beta'$ sont des fonctions de $\lambda$ telles que : ou bien $\beta \equiv 0$, ou bien $\beta$ ne s'évanouit nulle part et $\frac{K(b)\beta'}{\beta}$ est une fonction décroissante de $\lambda$.

La réponse est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le système précédent a une infinité de nombres caractéristiques dans l'intervalle $\Lambda_1 \Lambda_2$. Le premier de ces nombres peut être entre $\Lambda_1$ et $\mu_m$, mais on peut certainement affirmer qu'il y en a un exactement dans chaque intervalle $(\mu_m \mu_{m+1})$, $(\mu_{m+1} \mu_{m+2})$; ....*

En effet, si $\lambda$ croît dans un tel intervalle $\mu_i \mu_{i+1}$, $u$ étant la solution [1] du système privé de la deuxième condition, $\frac{K(b)u'(b)}{u(b)}$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$, et par hypothèse $\frac{K(b)\beta'}{\beta}$ décroît, donc $\frac{-K(b)\beta'}{\beta}$ croît; il est donc clair que pour une certaine valeur de $\lambda$, d'ailleurs unique entre $\mu_i$ et $\mu_{i+1}$, on a l'égalité, c'est-à-dire $\beta u'(b)+\beta' u(b)=0$; ceci suffit à prouver que dans chaque intervalle $\mu_i \mu_{i+1}$ il y a une valeur unique de $\lambda$ pour laquelle le système proposé est compatible.

On a supposé $\beta \neq 0$. Si l'on avait $\beta \equiv 0$, la deuxième condition se réduirait à $u(b)=0$, et ce seraient les $\mu_m$, $\mu_{m+1}$, ... qui seraient précisément les valeurs caractéristiques.

D'une façon générale, nous appellerons $\lambda_{m+1}$ la valeur caractéristique entre $\mu_m$ et $\mu_{m+1}$, $\lambda_{m+2}$ la valeur caractéristique entre $\mu_{m+1}$ et $\mu_{m+2}$, ..., et s'il y a une valeur caractéristique entre $\Lambda_1$ et $\mu_m$, nous l'appellerons $\lambda_m$. Il est clair, par un raisonnement tout analogue à celui que nous venons de donner, que dans l'intervalle $\Lambda_1 \mu_m$ il ne peut y avoir plus d'une valeur caractéristique.

Nous appellerons $u_m$, $u_{m+1}$, $u_{m+2}$, ... la solution du système pour les valeurs caractéristiques $\lambda_m$, $\lambda_{m+1}$, ... (nous disons *la* solution, en négligeant le facteur constant arbitraire qui la multiplie).

Ces fonctions diffèrent par le nombre de leurs zéros *entre $a$ et $b$*.

$u_m$, s'il existe, aura exactement $m$ zéros entre $a$ et $b$, $u_{m+1}$ en aura $m+1$, ....

Ce résultat constitue un des théorèmes d'oscillation de Sturm. On peut l'énoncer ainsi :

Théorème. — *Étant donné un nombre entier quelconque $k > m$, il existe une valeur de $\lambda$ et une seule pour laquelle le système proposé admet une solution ayant exactement $k$ zéros entre $a$ et $b$.*

Le théorème ci-dessus est incomplet en ce sens qu'il ne dit pas si $\lambda_m$ existe, et qu'il ne nous apprend pas à déterminer $m$.

On peut aller plus loin avec des hypothèses plus précises sur G et K.

---

[1] D'après la nature du système on voit évidemment que, si une solution existe, on en déduit une infinité en la multipliant par une constante arbitraire.

Ajoutons aux hypothèses déjà faites la suivante

$$\lim_{\lambda=\Lambda_1}\left(\frac{-\min G}{\min K}\right)=-\infty,$$

$\min K$ est par hypothèse nécessairement $>0$. Donc $\min G$ sera $>0$ aux environs de $\Lambda_1$. Donc $G$ sera, pour les valeurs $\lambda$ voisines de $\Lambda_1$, positif pour toute valeur de $x$ dans $ab$. On sait qu'alors l'équation est non oscillatoire. Donc pour $\lambda$ voisin de $\Lambda_1$ toute solution de l'équation, et *a fortiori* du système (1) n'aura pas plus d'un zéro dans $ab$. Donc on aura $m=0$ ou $1$.

Précisons davantage : pour cela nous comparons l'équation différentielle du système à la suivante

$$\frac{d}{dx}[(\min K)u'] - (\min G)u = 0 \tag{2}$$

ou

$$\frac{d^2u}{dx^2} - su = 0$$

avec

$$s=\frac{\min G}{\min K} > 0.$$

Cette équation admet les solutions fondamentales

$$e^{\sqrt{s}(x-a)} \quad \text{et} \quad e^{-\sqrt{s}(x-a)}.$$

Choisissons ensuite un nombre $\lambda_0$ entre $\mu_m$ et $\Lambda_2$, et cherchons la solution $u_2$ de (2) qui vérifie

$$(\min K_0)\,\alpha'(\lambda_0)\,u_2(a) - (\min K)\,\alpha(\lambda_0)\,u_2'(a) = 0 \tag{3}$$

où nous avons désigné par $K_0$ la valeur de $K$ pour $\lambda=\lambda_0$. On trouve

$$u_2 = \frac{(\min K)\,\alpha(\lambda_0)\sqrt{s} + (\min K_0)\,\alpha'(\lambda_0)}{2\sqrt{s}}\,e^{\sqrt{s}(x-a)}$$
$$+\frac{(\min K)\,\alpha(\lambda_0)\sqrt{s} - (\min K_0)\,\alpha'(\lambda_0)}{2\sqrt{s}}\,e^{-\sqrt{s}(x-a)}.$$

Faisons la comparaison entre $u_2$ qui vérifie (2) et (3) et une fonction $u$ vérifiant dans le système (1) l'équation et la première condition.

En passant de (1) à (2) on a diminué les coefficients de l'équa-

tion et remplacé la première condition de (1) par (3) de façon que $\frac{K(a)\alpha'}{\alpha}$ soit diminuée. [En effet, le système (1) est étudié ici pour $\lambda$ compris entre $\Lambda_1$ et $\mu_m$, et $\lambda_0$ étant $> \mu_m$, la valeur de $\frac{K(a)\alpha'}{\alpha}$, qui est fonction décroissante de $\lambda$, est plus grande entre $\Lambda_1$ et $\mu_m$ que pour $\lambda_0$.] On peut donc conclure, d'après les théorèmes de comparaison de Sturm, que $\frac{K(b)\,u'(b)}{u(b)}$ est plus grand que $\frac{(\min K)\,u'_2(b)}{u_2(b)}$, valeur de l'expression précédente prise pour le système (2) (3).

Or, en nous servant de la valeur de $u_2$, nous trouvons facilement que

$$\lim_{\lambda=\Lambda_1} \frac{(\min K)u'_2(b)}{u_2(b)} = +\infty.$$

Donc *a fortiori*

$$\lim_{\lambda=\Lambda_1} \frac{K(b)u'(b)}{u(b)} = +\infty.$$

Nous avons cette conclusion que $\lambda$ variant de $\Lambda_1$ à $\mu_m$, $\frac{K(b)\,u'(b)}{u(b)}$ décroît, sous nos hypothèses, de $+\infty$ à $-\infty$. On en conclut, que le système (1) a un nombre caractéristique $\lambda_m$ et un seul dans l'intervalle $\Lambda_1\,\mu_m$.

De plus, si l'on observe que pour $s$ très grand l'expression $u_2$ précédemment écrite a pour toute valeur de $x$ dans $(ab)$ le signe de $\alpha(\lambda_0)$, ou, si $\alpha(\lambda_0) = 0$, le signe de $\alpha'(\lambda_0)$, on conclut que $m$ est égal à zéro, et non à 1.

*En résumé : si l'on envisage le système*

$$(1)\qquad \begin{array}{|c|}\hline \frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \\ \hline \end{array}$$

K, G, $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ *étant des fonctions de* $\lambda$ (*et les deux premières, de* $x$ *aussi*) *satisfaisant aux conditions déjà énoncées ; si en outre les conditions*

$$\lim_{\lambda=\Lambda_2} \left(\frac{-\max G}{\max K}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda=\Lambda_1} \left(\frac{-\min G}{\min K}\right) = -\infty$$

*sont remplies, le système* (1) *a une infinité de nombres caractéristiques entre* $\Lambda_1$ *et* $\Lambda_2$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$, *rangés par ordre de grandeur croissante. Les fonctions caractéristiques* $u_0, u_1, \ldots$ *solutions du système* (1) *pour* $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots$ *ont entre* $a$ *et* $b$ *un nombre de zéros exactement égal à leur indice.*

Indiquons un autre genre de conditions qui conduit à des conclusions analogues.

Supposons l'intervalle $\Lambda_1 \Lambda_2$ fermé à gauche (c'est-à-dire que $\Lambda_1$ appartient à cet intervalle) et en ce point $\Lambda_1$ supposons

$$(\min G)_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0, \qquad (\alpha\alpha')_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0, \qquad (\beta\beta')_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0.$$

Alors on a $m = 0$ et la valeur caractéristique $\lambda_0$ existe à coup sûr.

En effet, envisageons le système auxiliaire

$$(4) \qquad \boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix}\min K \\ \lambda=\Lambda_1\end{pmatrix} u'\right] - \begin{pmatrix}\min G \\ \lambda=\Lambda_1\end{pmatrix} u = 0 \\ \alpha'(\Lambda_1)u(a) - \alpha(\Lambda_1)u'(a) = 0 \end{gathered}}$$

La notation $\begin{pmatrix}\min K \\ \lambda = \Lambda_1\end{pmatrix}$ s'explique aisément. Si $x$ varie dans $ab$, $K(x, \lambda)$ a un minimum ($\min K$) qui est fonction de $\lambda$. C'est la valeur en $\Lambda_1$ de cette fonction que nous désignons par $\begin{pmatrix}\min K \\ \lambda = \Lambda_1\end{pmatrix}$.

Soit $v_2(x)$ une solution de ce système. Et soit $v_1(x)$ une solution du système

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0. \\ &\alpha'(\Lambda_1)u(a) - \alpha(\Lambda_1)u'(a) = 0. \end{aligned}\right.$$

où l'on a fait $\lambda = \Lambda_1$ dans K et G.

Le théorème de comparaison dit que : si $v_2$ n'a pas de zéro dans $ab$, $v_1$ n'en aura pas *a fortiori*. Si de plus on montre que

$$\frac{(\min K)v_2'(b)}{v_2(b)} \geqq 0,$$

le théorème de comparaison donnera

$$\frac{K(b)v_1'(b)}{v_1(b)} \geqq 0.$$

Or on peut intégrer (4).

Excluons un instant le cas où $\begin{pmatrix} \min G \\ \lambda = \Lambda_1 \end{pmatrix} = 0$ et posons

$$s = \frac{(\min G)_{\lambda=\Lambda_1}}{(\min K)_{\lambda=\Lambda_1}}$$

($s$ est $> 0$ et $\neq 0$), la solution $v_2$ est donnée par

$$v_2(x) = \alpha(\Lambda_1)\,\mathrm{ch}\,\sqrt{s}\,(x-a) + \frac{\alpha'(\Lambda_1)}{\sqrt{s}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{s}\,(x-a)$$

comme le montre un calcul déjà fait plus haut.

On peut évidemment, si $\begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \lambda = \Lambda_1 \end{pmatrix} \geqq 0$, supposer $\alpha \geqq 0$, $\alpha' \geqq 0$ sans restreindre la généralité puisque $\alpha$ et $\alpha'$ n'interviennent que dans la condition de (4) et (5), alors, $v_2(x)$ est $\geqq 0$; comme de plus $\alpha$ et $\alpha'$ ne peuvent s'annuler en même temps, on conclut que $v_2(x) > 0$ dans $ab$. Donc $v_1(x)$ solution de l'équation différentielle et de la première condition du système (1) pour $\lambda = \Lambda_1$ n'a pas de zéro dans $ab$. Donc $m = 0$.

Et un calcul fort simple montre de suite que

$$\frac{(\min K)v_2'(b)}{v_2(b)} > 0 \quad \text{et} \quad \neq 0.$$

On en conclut

$$\frac{K(b)v_1'(b)}{v_1(b)} > 0.$$

Si alors $\lambda$ croît de $\Lambda_1$ à la première valeur $\mu_m$ qui fait acquérir aux solutions $v(x)$ de l'équation différentielle et de la première condition du système (1) un zéro en $b$, $\frac{K(b)v'(b)}{v(b)}$ décroîtra depuis une valeur positive $\neq 0$ jusqu'à $-\infty$, et comme $-\frac{K(b)\beta'}{\beta}$ croît en commençant par une valeur négative dans les mêmes conditions, il y a un nombre caractéristique $\lambda_0$ du système (1) entre $\Lambda_1$ et $\mu_m$.

Dans le cas spécial où $\begin{pmatrix} \min G \\ \lambda = \Lambda_1 \end{pmatrix} = 0$, $s$ est $= 0$, la solution $v_2$ est une fonction linéaire de $x - a$. On voit encore que $v_2(x) > 0$ dans $ab$, et que $\frac{(\min K)v_2'(b)}{v_2(b)}$ est positif ou nul. Le même raisonnement que précédemment montre que $m = 0$ et que $\lambda_0$ existe; mais dans un cas particulier, $\lambda_0$ peut coïncider avec $\Lambda_1$. Ceci ne peut arriver que si $\alpha'(\Lambda_1) = 0$, $\beta'(\Lambda_1) = 0$, $G(x, \Lambda_1) \equiv 0$, comme on

le voit par des calculs très simples. Si enfin $\beta$ était nul, $\mu_m$ serait précisément la valeur $\lambda_m$ que nous étudions.

*En résumé, moyennant les conditions*

$$[\min G]_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0, \qquad (\alpha\alpha')_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0, \qquad (\beta\beta')_{\lambda=\Lambda_1} \geqq 0,$$

*il y a une infinité de nombres caractéristiques du système* (1) $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ *dans* $(\Lambda_1 \Lambda_2)$, *auxquels correspondent des fonctions caractéristiques* $u_0, u_1, \ldots$ *ayant entre a et b un nombre de zéros égal à leur indice.* $\lambda_0$ *ne peut être égal à* $\Lambda_1$ *que si l'on a*

$$G(x, \Lambda_1) = 0, \qquad \alpha'(\Lambda_1) = 0, \qquad \beta'(\Lambda_1) = 0.$$

Nous avons dit que Sturm avait donné des cas particuliers du théorème d'oscillation. Il l'avait énoncé en particulier pour le système

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ku') + (\lambda g - l)u &= 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) &= 0 \\ \beta' u(b) - \beta u'(b) &= 0 \end{aligned}}$$

où les conditions imposées à $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ sont les mêmes que précédemment, $k, g, l$ étant, en outre, des fonctions de $x$ indépendantes de $\lambda$ satisfaisant aux inégalités $k > 0$, $g > 0$ dans $(ab)$.

Ici $k$ reste invariable. $G = l - \lambda g$ diminue si $\lambda$ croît de $\Lambda_1 = -\infty$ à $\Lambda_2 = +\infty$.

Les conditions aux bornes sont remplies; par exemple, $-\max G = \min(\lambda g - l)$ croît indéfiniment si $\lambda$ croît jusqu'à $+\infty$. Il y a donc pour ce système une infinité de valeurs caractéristiques croissantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ tendant vers $+\infty$, et les fonctions caractéristiques correspondantes ont $0, 1, 2, 3, \ldots$ zéros dans $(ab)$. Sturm ajoute les restrictions $l \geqq 0$ [1], $\alpha\alpha' \geqq 0$, $\beta\beta' \geqq 0$ tout au moins pour $\lambda = 0$, qui lui sont imposées par le problème physique dont il s'occupe; ces conditions, superflues pour le théorème d'oscillation, permettent toutefois de préciser davantage la position des nombres caractéristiques, en affirmant par exemple qu'ils sont

(1) Pour être plus exact, les conditions de Sturm sont $l \geqq 0$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ étant des constantes $\geqq 0$ indépendantes de $\lambda$.

tous positifs. En effet, si l'on considère l'intervalle $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = +\infty$ fermé en $\Lambda_1$, le deuxième genre de conditions données pour le théorème d'oscillation est valable pour cet intervalle, car pour $\lambda = 0$, $G = l$ est $\geqq 0$ et son minimum est $\geqq 0$. Alors $\lambda_0$, $\lambda_1$, ... sont positifs.

Revenons sur un problème dont nous avons précédemment parlé, relatif à l'équation

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}(ku') + (\lambda g - l)u = 0,$$

où l'on suppose toujours $k > 0$, $l \geqq 0$, mais où $g$ change de signe. [Le cas où $g$ est constamment $< 0$ n'est pas essentiellement distinct de celui où $g > 0$, il suffit de changer $\lambda$ en $-\lambda$ pour les ramener l'un à l'autre. Enfin nous laissons de côté le cas où $g$ conserve le même signe, mais pourrait s'annuler.]

Pour obtenir, dans les nouvelles hypothèses, des résultats précis il faut supposer

$$\alpha\alpha' \geqq 0, \qquad \beta\beta' \geqq 0.$$

Nous allons montrer comment on peut faire rentrer ce cas particulier dans les résultats précédents.

Divisons les deux membres de l'équation proposée par $|\lambda| = v$, il vient

$$(7) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{v}u'\right) - \left[\frac{l}{v} - g(\operatorname{sgn}\lambda)\right]u = 0 \qquad \operatorname{sgn}\lambda = \begin{cases} +1 & \text{si } \lambda > 0, \\ -1 & \text{si } \lambda < 0; \end{cases}$$

c'est une équation du type habituel à

$$K = \frac{k}{v}, \qquad G = \frac{l}{v} - g(\operatorname{sgn}\lambda),$$

si $v$ augmente, K et G diminuent.

Voyons si $\frac{K(a)\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{K(b)\beta'}{\beta}$ diminuent quand $v$ augmente.

Il faut pour cela que $\frac{1}{v}\frac{k(a)\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{1}{v}\frac{k(b)\beta'}{\beta}$ diminuent.

Si donc nous imposons la condition que $\frac{k(a)\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{k(b)\beta'}{\beta}$ diminuent quand $v$ augmente (et il suffit pour cela que $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ diminuent), on voit, à cause de $\alpha\alpha' \geqq 0$, $\beta\beta' \geqq 0$, que $\frac{K(a)\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{K(b)\beta'}{\beta}$ diminueront aussi.

Nous avons supposé plus haut que

$$\lim_{\lambda=\Lambda_2}\left(\frac{-\max G}{\max K}\right)=+\infty.$$

Or ici posons l'intervalle $\Lambda_1=0$, $\Lambda_2=+\infty$. Si $\nu$ grandit, le terme prépondérant dans G étant $-g(\operatorname{sgn}\lambda)$, on voit que G changera de signe, si $\nu$ est assez grand; donc $\max G$ sera $>0$ et l'on aura par suite

$$\lim_{\nu=+\infty}\left(\frac{-\max G}{\max K}\right)=-\infty,$$

puisque $\max K=\max\frac{k}{\nu}$ est $>0$ et tend vers zéro si $\nu$ tend vers l'infini. Le résultat trouvé semble en contradiction avec la condition ci-dessus rappelée. Il est pourtant facile de voir que l'essentiel de la condition précédente pour le théorème d'oscillation se trouve ici encore vérifié. Considérons, en effet, la fonction $-g(\operatorname{sgn}\lambda)$. On peut trouver certainement dans $ab$ un intervalle $a'b'$ où elle reste constamment négative [car $-g(\operatorname{sgn}\lambda)$ change de signe dans $ab$]. Son maximum dans $a'b'$ est donc $<0$.

Restreignons-nous à l'intervalle $a'b'$ pour la variable $x$. La condition précédente se trouvera remplie : on aura bien

$$\lim_{\nu=+\infty}\left(\frac{-\max G}{\max K}\right)=+\infty.$$

Si alors on se rappelle que cette condition nous a permis d'affirmer que la solution $v_1$ du système

$$\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0,\qquad \alpha' u(a)-\alpha u'(a)=0$$

pouvait avoir (si $\lambda$ était suffisamment voisin de $\Lambda_2$) un nombre de zéros arbitrairement grand dans l'intervalle $ab$, on voit qu'ici les mêmes conclusions s'appliquent à l'intervalle $a'b'$ et ainsi *a fortiori* à l'intervalle $ab$.

La même observation peut se faire pour le deuxième genre de conditions indiquées

$$(\min G)_{\lambda=\Lambda_1}\geqq 0,\qquad \alpha\alpha'\geqq 0,\qquad \beta\beta'\geqq 0.$$

A vrai dire $\nu=0$ n'appartient pas à l'intervalle de variation que

nous admettons pour $v$ puisque pour $v$ tendant vers zéro la fonction K de (7) tend vers l'infini.

Mais reprenons la forme initiale (6) pour laquelle $v = 0$ ne cause aucune singularité.

On peut en opérant comme précédemment, comparer l'équation (6) où $v = 0$ et la condition $\alpha'(0)u(a) - \alpha(0)u'(a) = 0$ à un système analogue au système que nous avons appelé (4), dont $v_2$ sera la solution ; on déduit sans difficulté $v_2(x) \geq 0$, $\frac{(\min K)\, v_2'(b)}{v_2(b)} \geq 0$, on passe de là à la solution $v_1(x)$ de (6).

Alors :

1° Si $\lambda > 0$, on a entre 0 et $+\infty$ la série infinie de valeurs caractéristiques positives $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$;

2° Si $\lambda < 0$, en posant $v = -\lambda$ dans l'équation (6), on trouve de nouvelles valeurs caractéristiques différentes des précédentes, puisque $G = l - \lambda g$ change de valeur si l'on change $\lambda$ en $-\lambda$.

Nous pouvons désigner par $\lambda_0^+, \lambda_1^+, \ldots$ les valeurs caractéristiques positives (elles vont en croissant et tendent vers $+\infty$), et par $\lambda_0^-, \lambda_1^-, \ldots$ les valeurs caractéristiques négatives (elles vont en décroissant et tendent vers $-\infty$).

$\lambda_0^+$ et $\lambda_0^-$ sont en général l'une $> 0$ l'autre $< 0$, et ni l'une ni l'autre ne peut être $= 0$ sauf dans le cas d'exception signalé plus haut où G se réduit à zéro pour $\lambda = \Lambda_1$, $\alpha'(\Lambda_1) = 0$, $\beta'(\Lambda_1) = 0$, c'est-à-dire ici pour $l \equiv 0$, avec $\begin{matrix}\alpha'(0) = 0\\ \beta'(0) = 0\end{matrix}$ [1].

En définitive, nous avons encore dans le cas où $g$ change de signe un théorème d'oscillation; il ne diffère du théorème relatif à $g$ de signe invariable qu'en ce que, pour chaque entier, $k$ il y a deux valeurs caractéristiques, $\lambda_k^+$ et $\lambda_k^-$ positive et négative donnant au système (8) une solution pourvue de $k$ zéros dans l'intervalle $ab$.

**16. Étude des valeurs caractéristiques au point de vue de la réalité et de leur ordre de multiplicité.** — Dans les paragraphes précédents nous n'avons étudié que les valeurs caractéristiques

---

[1] La discussion complète de ce cas, un peu exceptionnel, ne présente aucune difficulté sérieuse pour la méthode dont nous nous servons, comme je l'indique dans le *Bulletin de la Société mathématique américaine*, octobre 1914.

réelles. Demandons-nous maintenant s'il en existe d'imaginaires.

Il est indispensable pour cela de supposer que les coefficients du système différentiel étudié sont définis pour les valeurs imaginaires de $\lambda$.

Nous n'étudierons à ce point de vue que des systèmes de Sturm :

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}(ku') + (\lambda g - l)u = 0,$$

$$(2)\qquad \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \qquad |\alpha| + |\alpha'| > 0,$$

$$(3)\qquad \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \qquad |\beta| + |\beta'| > 0,$$

où nous supposerons $k$, $g$, $l$ fonctions de $x$ seulement, $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ indépendants de $\lambda$.

Soit $v_1(x, \lambda)$ la solution de (1) qui satisfait aux conditions $u(a) = \alpha$, $u'(a) = \alpha'$. Les deux fonctions $v_1(x, \lambda)$ et $v'_1(x, \lambda)$ sont continues en $(x, \lambda)$ et non seulement analytiques, mais entières en $\lambda$.

Pour que le système soit compatible, il faut et il suffit que $v_1(x, \lambda)$ vérifie la condition (3). Ceci donne comme équation pour déterminer les nombres caractéristiques

$$(4)\qquad \beta' v_1(b, \lambda) + \beta v'_1(b, \lambda) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction entière de $\lambda$. C'est bien la même *équation caractéristique* que nous donne la formule (1) du paragraphe 11 quand on se sert du système fondamental $u_1 = v_1$, $u_2 =$ la solution de (1) telle que $u_2(a) = \gamma$, $u'_2(a) = \gamma'$, où $\gamma$ et $\gamma'$ sont des constantes et $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 1$.

Tout d'abord, existe-t-il des nombres caractéristiques imaginaires ?

Établissons, avant de répondre, une formule indispensable.

Soient $\lambda'$, $\lambda''$ deux nombres caractéristiques distincts, $u_1$ et $u_2$ les fonctions caractéristiques [solution du système (1) (2) (3)] correspondantes. D'après une formule de Sturm [formule (1), § 13],

$$[k(u'_1 u_2 - u_1 u'_2)]_a^b + \int_a^b (\lambda' - \lambda'') g u_1 u_2 \, dx = 0.$$

Mais $u_1$ et $u_2$ vérifiant les conditions (2) et (3) il reste

$$(\lambda' - \lambda'') \int_a^b g u_1 u_2 \, dx = 0$$

et, puisque $\lambda' \neq \lambda''$,

$$\int_a^b g u_1 u_2 \, dx = 0.$$

Cette formule est valable pour $k$, $g$, $l$ fonctions complexes de la variable réelle $x$, et $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ constantes complexes quelconques.

Mais supposons les coefficients $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ réels ainsi que les fonctions $k$, $g$, $l$.

Le premier membre de (4) est évidemment une fonction réelle, si $\lambda$ est réel. Donc ses racines sont 2 par 2 conjuguées. A la racine imaginaire $\lambda' = \mu + \nu i$, $\nu \neq 0$ correspondrait la racine $\lambda'' = \mu - \nu i$ et $\lambda'$ serait $\neq \lambda''$.

Si à $\lambda'$ correspond la fonction caractéristique $u_1 = s + it$; à $\lambda''$ correspondra la fonction imaginaire conjuguée $u_2 = s - it$.

Appliquant la relation précédente à ces deux fonctions $u_1$ et $u_2$, on a

$$(5) \qquad \int_a^b g(s^2 + t^2) \, dx = 0,$$

$s$ et $t$ étant des fonctions réelles de $x$, non tous deux identiquement nulles puisque $u_1$ ne l'est pas, si l'on suppose $g > 0$ ou exceptionnellement nul, on a une contradiction. Il n'y a donc pas dans ce cas de valeurs caractéristiques imaginaires. C'est un résultat de Poisson, et nous n'avons fait que reproduire sa démonstration.

Examinons maintenant le deuxième cas déjà mentionné dans les précédents paragraphes $k > 0$, $l \geqq 0$, $\alpha\alpha' \geqq 0$, $\beta\beta' \geqq 0$, $g$ changeant de signe. Alors le théorème précédent est encore vrai : toutes les valeurs caractéristiques sont réelles.

Soient en effet $\lambda' = \mu + \nu i$ une valeur caractéristique imaginaire, supposée exister; $u_1 = s + it$ la fonction correspondante. Écrivant que $u_1$ vérifie l'équation (1) on a, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire du premier membre,

$$\frac{d}{dx}(ks') + (\mu g - l)s - \nu g t = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(kt') + \nu g s + (\mu g - l)t = 0.$$

On conclut de là en multipliant la première par $s$, la deuxième

par $t$, ajoutant et intégrant

$$(6)\quad [k(ss'+tt')]_a^b - \int_a^b k(s'^2+t'^2)\,dx + \mu\int_a^b g(s^2+t^2)\,dx - \int_a^b l(s^2+t^2)\,dx = 0.$$

Il est clair que le deuxième et le quatrième terme ne sont pas positifs, et le troisième est nul, d'après (5).

Moyennant les hypothèses $\alpha\alpha' \geqq 0$, $\beta\beta' \geqq 0$, on voit que $s$ et $s'$ ont même signe en $a$ d'après la condition (2) ainsi que $t$, $t'$; $s$ et $s'$, $t$ et $t'$ ont des signes contraires en $b$.

Donc

$$[k(ss'+tt')]_a^b$$

est une quantité $\leqq 0$.

D'autre part

$$-\int_a^b k(s'^2+t'^2)\,dx$$

est bien $< 0$ et n'est pas nul, sans quoi il faudrait que $s'$ et $t'$, et par suite $u'_1$, fussent constamment nuls dans $ab$; donc que $u_1$ fût une constante différente de zéro (pour n'être pas identiquement nulle); ceci exigerait

$$(\mu+\nu i)g - l = 0,$$

c'est-à-dire $\nu g \equiv 0$ et comme $\nu \neq 0$, $g \equiv 0$.

Ceci est incompatible avec l'hypothèse que $g$ change de signe. Le premier membre de (6) serait donc bien négatif, d'où la contradiction qui démontre le résultat annoncé.

Dans l'étude des valeurs caractéristiques deux que tions se posent :

1° *Quel est pour une telle valeur l'indice du système?* — On voit immédiatement que, dans le cas actuel, l'indice a toujours la valeur 1, puisque autrement toute solution de (1) devrait vérifier (2).

2° *Quel est l'ordre de multiplicité d'une racine de l'équation caractéristique?* — Établissons une formule préliminaire.

Si $u$ est une fonction caractéristique on a

$$\int_a^b gu^2\,dx \neq 0$$

(sauf dans le cas exceptionnel où $g$ change de signe, $l\equiv 0$, $\alpha'=\beta'=0$. C'est un cas que nous exclurons; voyez la note vers la fin du paragraphe 15). Si $g>0$, la démonstration est immédiate.

Si $g$ change de signe, soit $\lambda$ le nombre caractéristique auquel correspond la fonction caractéristique $u$. En multipliant par $u$ l'équation différentielle à laquelle satisfait $u$ et intégrant, on trouve la formule

$$\lambda\int_a^b gu^2\,dx = -[kuu']_a^b+\int_a^b ku'^2\,dx+\int_a^b lu^2\,dx.$$

Le premier terme à droite est positif ou zéro en vertu des relations

$$\alpha\alpha'\geqq 0,\qquad \beta\beta'\geqq 0.$$

Puisque le second terme ne peut être zéro que dans le cas d'exception que nous avons exclu, on voit que $\lambda\int_a^b gu^2\,dx$ est positif (pas nul). Notre inégalité est ainsi démontrée puisque le nombre caractéristique $\lambda$ ne peut être $=0$ que dans le cas d'exception.

Ce résultat étant établi il est facile de voir que, hors le cas d'exception signalé, toute racine de l'équation caractéristique est simple.

Envisageons la fonction entière de la formule (4),

$$F(\lambda)=\beta' v_1(b,\lambda)+\beta v_1'(b,\lambda).$$

Soit $\lambda_1$ un quelconque de ses zéros, la fonction caractéristique correspondante sera $v_1(x,\lambda_1)$. Calculons $F'(\lambda_1)$.

Combinant l'équation (1) que vérifie $v_1(x,\lambda)$ avec celle que vérifie $v_1(x,\lambda_1)$ on tire, en éliminant $l$,

$$\Big\{k[v_1(x,\lambda)v_1'(x,\lambda_1)-v_1'(x,\lambda)v_1(x,\lambda_1)]\Big\}_a^b$$
$$+(\lambda_1-\lambda)\int_a^b gv_1(x,\lambda_1)v_1(x,\lambda)\,dx=0.$$

$v_1(x,\lambda)$ et $v_1(x,\lambda_1)$ vérifiant la condition (2) relative au point $a$, et $v_1(x,\lambda_1)$ vérifiant la condition (3) relative à $b$, cette égalité se réduit à

$$\int_a^b gv_1(x,\lambda_1)v_1(x,\lambda)\,dx=\frac{k(b)v_1'(b,\lambda_1)}{\beta'}\;\frac{\beta' v_1(b,\lambda)+\beta v_1'(b,\lambda)}{\lambda-\lambda_1}.$$

Ceci en supposant $\beta' \neq 0$. [Si $\beta' = 0$ un calcul semblable donne le même résultat final.]

Or

$$\beta' v_1(b, \lambda) - \beta v'_1(b, \lambda) = F(\lambda) = F(\lambda) - F(\lambda_1),$$

puisque $F(\lambda_1) = 0$. Si donc $\lambda$ tend vers $\lambda_1$, le deuxième membre va tendre vers

$$\frac{k(b) v'_1(b, \lambda_1)}{\beta'} F'(\lambda_1);$$

$v_1(x, \lambda)$ va tendre uniformément vers $v_1(x, \lambda_1)$ quel que soit $x$ dans $ab$. Donc le premier membre tendra vers

$$\int_a^b g[v_1(x, \lambda_1)]^2 \, dx$$

qui est $\neq 0$.

On en conclut que $F'(\lambda_1) \neq 0$. Toute racine de l'équation caractéristique est donc racine simple, sauf le cas d'exception déjà signalé.



# CHAPITRE IV.

## LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES ET LEURS ZÉROS DANS QUELQUES CAS PLUS GÉNÉRAUX [1].

**17. La réalité des nombres caractéristiques.** — Nous ne traiterons en détail dans ce Chapitre que deux problèmes typiques qui dépassent les problèmes de Sturm étudiés dans le précédent Chapitre. Nous commençons, pourtant, par quelques considérations plus générales.

Envisageons un système homogène

$$(1)\qquad \boxed{\begin{array}{c} L(u)=l_n\dfrac{d^n u}{dx^n}+\ldots+l_1\dfrac{du}{dx}+(\lambda g-l)u=0 \\ U_i(u)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \end{array}}$$

$\lambda$ étant un paramètre dont les fonctions $g$, $l$, $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$ sont indépendantes, ainsi que les coefficients constants qui entrent dans les $U_i(u)$.

Le système adjoint s'écrira

$$(2)\qquad \boxed{\begin{array}{c} M(v)=m_n\dfrac{d^n v}{dx^n}+\ldots+m_1\dfrac{dv}{dx}+(\lambda g-m)v=0 \\ V_i(v)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \end{array}}$$

[1] Mason, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. VII, 1906, p. 337. — Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. X, 1909, p. 259. — Klein, *Math. Annalen*, t. XVIII, 1881, p. 419. — Bôcher, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. IV, 1898, p. 307 et 365; t. V, p. 22. — Richardson, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XIII, 1912, p. 22. — *Math. Annalen*, t. LXXIII, 1912, p. 289. Le résultat principal du paragraphe 1 de cet article est incorrect.

Pour les équations d'ordre supérieur, on consultera :

Liouville, *Journal de Mathématiques*, t. III, 1838, p. 561. — Davidoglou, *Annales de l'École Normale supérieure*, t. XVII, 1900, p. 359; t. XXII, 1905, p. 539. — Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. IX, 1908, p. 373; *Annals of Mathematics*, t. XII, 1911, p. 103. — Haupt, *Dissertation*, Würzburg, 1911.

et l'on voit facilement que $m, m_1, \ldots, m_n$ et les coefficients des $V_i$ sont indépendants de $\lambda$.

Ces deux systèmes ont, quel que soit $\lambda$, même indice; donc ils ont les mêmes nombres caractéristiques

Soient $u_1$, $u_2$, ... les fonctions caractéristiques du premier système; $v_1$, $v_2$, ... les fonctions caractéristiques correspondantes du deuxième.

Pour deux nombres caractéristiques différents, par exemple $\lambda_1 . \lambda_2$, je dis que l'on a

$$\int_a^b g u_1 v_2 \, dx = 0.$$

Nous utilisons la formule de Green

$$\int_a^b [v \mathrm{L}(u) - u \mathrm{M}(v)] \, dx = \mathrm{U}_1 \mathrm{V}_{2n} + \ldots + \mathrm{U}_{2n} \mathrm{V}_1.$$

Soient $\mathrm{L}_0(u)$ et $\mathrm{M}_0(v)$ ce que deviennent $\mathrm{L}(u)$ et $\mathrm{M}(v)$ pour $\lambda = 0$. On a

$$\int_a^b [v \mathrm{L}(u) - u \mathrm{M}(v)] \, dx = \int_a^b [v \mathrm{L}_0(u) - u \mathrm{M}_0(v)] \, dx.$$

Pour $u = u_1$, $v = v_2$, le deuxième membre de la formule de Green est nul [d'après les conditions aux limites de (1) et (2)], et le premier membre se réduit à

$$\int_a^b [v_2 \mathrm{L}_0(u_1) - u_1 \mathrm{M}_0(v_2)] \, dx = \int_a^b (\lambda_2 - \lambda_1) g u_1 v_2 \, dx.$$

On a donc

$$\int_a^b g u_1 v_2 \, dx = 0.$$

Si, en particulier, le système est son propre adjoint, $v_1$, $v_2$, ... sont identiques à $u_1$, $u_2$, ... et la formule se réduit à

$$\int_a^b g u_1 u_2 \, dx = 0.$$

C'est le cas pour les systèmes de Sturm étudiés au précédent Chapitre, et pour lesquels la formule précédente a été établie directement.

De là on déduit, pour un système différentiel réel qui est son propre adjoint, que :

1° Si $g > 0$, tous les nombres caractéristiques sont réels. Car à toute valeur caractéristique $\lambda_1 = \mu + \nu i$ ($\nu \neq 0$) correspondrait $\lambda_2 = \mu - \nu i$ également caractéristique, et si $u_1 = s + ti$ on aurait $u_2 = s - ti$, d'où

$$\int_a^b g(s^2 + t^2)\, dx = 0,$$

qui est impossible si $g \gtreqless 0$.

2° Si $l \geqq 0$, $g$ changeant de signe, moyennant certaines conditions imposées aux coefficients des $U_i(u)$, les nombres caractéristiques sont encore réels.

Ces restrictions n'étonneront pas ici, si l'on songe que, pour le système de Sturm du deuxième ordre, aux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0, \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0, \end{cases}$$

il a fallu imposer $\alpha\alpha' \geqq 0$, $\beta\beta' \geqq 0$ pour démontrer le même résultat.

Pour ne pas compliquer les notations, bornons-nous à un système du deuxième ordre qui est son propre adjoint. Nous le prendrons sous la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{du}{dx}\right) + (\lambda g - l)u = 0, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha'_1 u'(a) + \beta_1 u(b) + \beta'_1 u'(b) = 0, \\ \alpha_2 u(a) + \alpha'_2 u'(a) + \beta_2 u(b) + \beta'_2 u'(b) = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu au Chapitre II que ce système est son propre adjoint à condition que

$$k(a)(\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1) = k(b)(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1).$$

Dans (4), on peut en général réduire les deux conditions à la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} u(a) = \gamma_1 u(b) + \gamma'_1 u'(b), \\ u'(a) = \gamma_2 u(b) + \gamma'_2 u'(b). \end{cases}$$

Il n'y aurait exception que si $\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1$, et par suite $\beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1$, étaient *nuls*.

Mais alors, il est clair que les conditions de (4) peuvent se réduire à la forme de Sturm (3) en éliminant d'abord les $\beta_1$, $\beta'_1$, $\beta_2$, $\beta'_2$, puis $\alpha_1$, $\alpha'_1$, $\alpha_2$, $\alpha'_2$.

On n'exclut donc pas de cas nouveau en prenant les conditions (4) sous la forme (5). Alors, la condition pour que le système soit son propre adjoint est

$$k(b) = k(a)(\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1). \tag{6}$$

Pour démontrer que les nombres caractéristiques sont réels, nous déduisons comme pour les systèmes de Sturm, au paragraphe 16,

$$[k(ss' + tt')]_a^b - \int_a^b k(s'^2 + s'^2)\,dx - \int_a^b l(s^2 + t^2)\,dx = 0,$$

égalité qui entraînerait une contradiction si l'on avait

$$k(a)s(a)s'(a) - k(b)s(b)s'(b) \geqq 0,$$
$$k(a)t(a)t'(a) - k(b)t(b)t'(b) \geqq 0.$$

Mais $s$ et $t$ satisfaisant en $a$ et $b$ aux conditions (5) que vérifie toute fonction caractéristique, il suffira pour avoir la contradiction précédente que toute fonction réelle $u$ vérifie

$$k(a)[\gamma_1 u(b) + \gamma'_1 u'(b)][\gamma_2 u(b) + \gamma'_2 u'(b)] - k(b)u(b)u'(b) \geqq 0,$$

ce qui se réduit par la formule (6) à

$$\gamma_1\gamma_2 u^2(b) + 2\gamma'_1\gamma_2 u(b)u'(b) + \gamma'_1\gamma'_2 u'^2(b) \geqq 0.$$

En vertu de l'inégalité $\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1 > 0$, qui est une conséquence de (6), on trouve facilement que la condition que cette forme quadratique en $u(b)$, $u'(b)$ soit définie et positive est que $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma'_1$, $\gamma'_2$ soient de même signe (quelques-uns d'entre eux pouvant s'annuler) : c'est un cas dont l'importance a d'abord été signalée par M. Mason.

Donc, si ces conditions de M. Mason sont vérifiées, on aboutit à une contradiction en supposant l'existence de nombres caractéristiques imaginaires, ce que nous voulions démontrer.

Un cas très important est celui d'un système du deuxième ordre où les conditions soient

$$\boxed{\begin{aligned} u(a) &= u(b) \\ u'(a) &= u'(b) \end{aligned}}$$

La condition pour qu'il soit son propre adjoint est

$$k(a) = k(b).$$

[Si nous définissions $k$ comme fonction périodique et de période $b-a$, $k(x)$ serait continue et positive pour toute valeur de $x$; si, de la même façon, nous prenions $g$ et $l$ périodiques, ce qui pourrait introduire, dans un intervalle fini de variation de $x$, un nombre fini de discontinuités pour ces deux fonctions (mais nous savons que ceci ne gêne pas), les conditions que nous venons d'écrire détermineraient des solutions périodiques et de période $b-a$ pour l'équation différentielle. Cette parenthèse montre comment on peut rattacher ce que nous allons dire à la théorie des solutions périodiques.]

Les conditions de M. Mason sont remplies. Donc non seulement si $g > 0$, mais aussi si $l \geqq 0$, $g$ changeant de signe, les nombres caractéristiques seront tous réels. Nous verrons dans la prochaine section qu'ils sont toujours en nombre infini.

Si, en particulier, on prend

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

tous les nombres caractéristiques sont réels. Pour les avoir, on prendra deux solutions fondamentales de l'équation, analytiques en $\lambda$,

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin x \sqrt{\lambda}, \qquad y_2 = \cos x \sqrt{\lambda}.$$

Les nombres caractéristiques se trouvent très aisément par une méthode directe; ce sont

$$0, \quad 1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad \ldots.$$

Si l'on forme l'équation caractéristique, on voit qu'à l'exception de zéro, toutes les valeurs caractéristiques en sont des racines doubles.

On voit aussi qu'elles ont l'indice 2.

Cet exemple montre que, dans les cas que nous considéron maintenant, ni les multiplicités ni les indices des nombres caractéristiques ne sont nécessairement égaux à 1.

**18. Les systèmes à conditions périodiques.** — Revenons à l'étude plus détaillée du système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ u(a) - u(b) = 0 \\ u'(a) - u'(b) = 0 \end{cases}$$

à conditions périodiques, et dans lequel nous supposerons

$$\mathrm{K}(a) = \mathrm{K}(b)$$

pour qu'il soit son propre adjoint.

K et G sont des fonctions de $x$ et $\lambda$, décroissantes en $\lambda$. Nous supposons en outre que ces deux fonctions satisfont aux conditions que, au Chapitre III, nous leur avons imposées, quand nous avons appliqué les méthodes de Sturm au système

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \end{cases}$$

Prenons deux solutions principales $y_1$, $y_2$ de l'équation :

$$y_1(a, \lambda) = 1, \qquad y_2(a, \lambda) = 0,$$
$$y'_1(a, \lambda) = 0, \qquad y'_2(a, \lambda) = 1.$$

La formule d'Abel donne

$$y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = \frac{\mathrm{K}(a)}{\mathrm{K}(x)}$$

et en particulier, pour $x = b$,

$$(2)\qquad y_1(b) y'_2(b) - y_2(b) y'_1(b) = \frac{\mathrm{K}(a)}{\mathrm{K}(b)} = 1,$$

quel que soit $\lambda$.

L'équation caractéristique est ici

$$\begin{vmatrix} 1 - y_1(b, \lambda) & -y_2(b, \lambda) \\ -y'_1(b, \lambda) & 1 - y'_2(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Elle se réduit à

$$\mathrm{F}(\lambda) = y_1(b, \lambda) + y'_2(b, \lambda) - 2 = 0$$

en vertu de l'identité (2).

A-t-elle une infinité de racines réelles ? Les méthodes de Sturm permettent de répondre affirmativement.

Considérons, en effet, le système auxiliaire

$$(3) \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0, \qquad u(a) = 0, \qquad u(b) = 0}$$

C'est un système de Sturm. Il a donc une infinité de nombres caractéristiques $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ auxquels correspondent des fonctions caractéristiques ayant 0, 1, 2, ... zéros dans $(a, b)$.

Pour ces valeurs $\mu_i$, $\mathrm{F}(\lambda)$ n'est pas nul en général, mais prend une forme particulière. En effet, pour ces valeurs, toute solution de $\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0$, nulle en $a$, est aussi nulle en $b$, donc

$$y_2(b, \mu_i) = 0,$$

par suite, (2) donne

$$y_1(b, \mu_i)\, y'_2(b, \mu_i) = 1,$$

et l'on a

$$\mathrm{F}(\mu_i) = \left[\sqrt{y_1(b, \mu_i)} - \sqrt{y'_2(b, \mu_i)}\right]^2.$$

Donc $\mathrm{F}(\mu_i)$ sera $\geqq 0$ ou $\leqq 0$, selon que $y_1(b, \mu_i)$ et $y'_2(b, \mu_i)$ seront $> 0$ ou $< 0$.

Bornons-nous à $y'_2(b, \mu_i)$.

Si $y'_2(b, \mu_i) < 0$,

$$\mathrm{F}(\mu_i) \leqq 0,$$

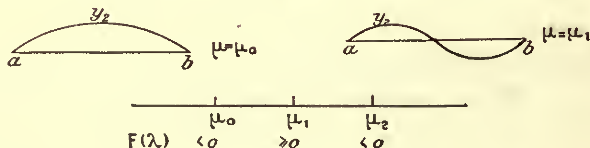
$y'_2(b, \mu_i)$ n'est pas $= 0$, car $y_2(b, \mu_i) = 0$.

Si $y'_2(b, \mu_i) > 0$,

$$\mathrm{F}(\mu_i) \geqq 0.$$

Ces inégalités donnent le signe de $\mathrm{F}(\lambda)$ aux points $\mu_0, \mu_1, \ldots$.

Fig. 1.




En effet, à $\mu_0$ correspond $y_2(x, \mu_0)$ nulle en $a$, $b$ et $> 0$ entre $a$ et $b$, puisque $y'_2(a) = 1$.

Donc

$$\mathrm{F}(\mu_0) \leqq 0.$$

Pour $\mu_1$ (voyez *fig.* 1),

$$y'_2(b, \mu_1) > 0, \qquad F(\mu_1) \geqq 0.$$

On peut continuer ainsi et l'on voit que l'équation $F(\lambda) = 0$ a une infinité de racines séparées par les nombres

$$\mu_0, \mu_1, \ldots.$$

On peut préciser davantage. Toute solution du système (1), non identiquement nulle, doit avoir un nombre pair de zéros dans l'intervalle $a \leqq x < b$ fermé en $a$, ouvert en $b$ à cause de $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$.

Il en résulte que $\mu_0, \mu_2, \mu_4, \ldots$ ne peuvent être des racines de $F(\lambda) = 0$. En effet, $y_2(x, \mu_0)$ a dans $(a \leqq x < b)$ un seul zéro qui est $a$; d'après le premier théorème de Sturm démontré au paragraphe **12**, toutes les autres solutions de l'équation différentielle auront aussi exactement un zéro dans l'intervalle; elles ne peuvent donc vérifier les conditions de périodicité en $a$ et $b$. Et le même raisonnement vaut pour $\mu_2, \mu_4, \ldots$. Donc

$$F(\mu_0) < 0, \qquad F(\mu_2) < 0, \qquad \ldots.$$

Nous irons plus loin en considérant le deuxième système auxiliaire de Sturm

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(Ku') - Gu &= 0 \\ u'(a) &= 0 \\ u'(b) &= 0 \end{aligned}}$$

Il a une infinité de nombres caractéristiques $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ auxquels correspondent des fonctions caractéristiques ayant 0, 1, 2, ... zéros dans $(a, b)$.

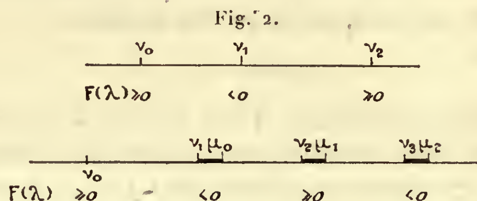
On raisonne sur les $\nu_i$ comme sur les $\mu_i$ et l'on trouve que $F(\lambda)$ a en ces points un signe qu'on peut fixer et qui est donné par le premier schéma ci-après (*fig.* 2).

On peut relier les $\mu_i$ et les $\nu_i$ entre eux.

D'abord $\nu_0 < \mu_0$, car pour $\lambda = \nu_0$ l'équation différentielle a une solution partout $\neq 0$ dans $(a, b)$; tandis que, pour $\lambda = \mu_0$, elle en a une qui est nulle en $a$ et $b$, et, par conséquent, pour toute valeur $\lambda \geqq \mu_0$ toute solution aura un zéro au moins dans $(a, b)$.

On voit de même que $\nu_1 < \mu_1$ car pour $\lambda \geqq \mu_1$, toute solution a au moins deux zéros dans $(a, b)$ alors que pour $\lambda = \nu_1$ il y a une solution n'ayant qu'un zéro dans l'intervalle.

Fig. 2.




On peut continuer ainsi et montrer que $\nu_i < \mu_i$.

Mais $\nu_i$ peut être $> \mu_{i-1}$ ou $< \mu_{i-1}$. Nous figurerons alors sur l'axe des $\lambda$ des petits segments réunissant les points $\nu_1, \mu_0$; $\nu_2, \mu_1$; .... Ces segments n'empiéteront jamais les uns sur les autres. Ils peuvent se réduire à des points. C'est le cas pour le système (7) de la section précédente.

On voit donc que le système (1) admet des nombres caractéristiques en nombre infini répartis :

1° Entre $\nu_0$ et le premier segment;

2° Entre les segments consécutifs.

A ces nombres caractéristiques correspondent des fonctions caractéristiques ayant des nombres faciles à déterminer de zéros dans $(a \leqq x < b)$.

Il s'agit maintenant de préciser ces résultats.

Les conclusions auxquelles nous allons arriver par la suite sont vraies dans tous les cas; mais, pour simplifier l'exposition, nous nous bornerons à supposer $K(x)$ indépendant de $\lambda$ et $G(x, \lambda)$ analytique en $\lambda$. Alors le premier membre $F(\lambda)$ de l'équation caractéristique sera une fonction analytique entre $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$, on pourra parler de l'ordre de multiplicité de ses racines. Nous avons ailleurs déjà supposé G fonction décroissante de $\lambda$, ici nous supposerons $\frac{\partial G}{\partial \lambda} < 0$ en excluant le cas où $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ pourrait devenir nul.

Ces conditions laissent encore assez de liberté pour que les résultats que nous établirons s'appliquent aux importants systèmes où $G = l - \lambda g$, $g > 0$.

L'équation caractéristique est, comme on sait,

$$F(\lambda) = y_1(b, \lambda) + y'_2(b, \lambda) - 2 = 0.$$

Considérons le signe de $F'(\lambda)$ pour les diverses racines de $F(\lambda) = 0$ :

$$F' = \frac{\partial}{\partial\lambda}[y_1(b, \lambda)] + \frac{\partial}{\partial\lambda}[y'_2(b, \lambda)].$$

Pour calculer les dérivées ci-dessus, remarquons que si l'on considère plus généralement la solution $u$ de l'équation différentielle pour laquelle $u(a) = \alpha$, $u'(a) = \alpha'$, $\alpha$ et $\alpha'$ étant deux constantes quelconques, $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ vérifie l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[K\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)'\right] - G\frac{\partial u}{\partial\lambda} = \frac{\partial G}{\partial\lambda}u.$$

C'est une équation linéaire non homogène en $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$, et l'équation sans deuxième membre est l'équation proposée qui admet la solution $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$. La méthode de la variation des constantes donne $\frac{\partial u}{\partial\lambda}$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)'$, en tenant compte de ce que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right]_a = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)'\right]_a = 0$$

puisque, quel que soit $\lambda$, les valeurs en $a$ de $u$ et $u'$ sont toujours $\alpha$ et $\alpha'$,

$$\frac{\partial u}{\partial\lambda} = \int_a^x \frac{\partial G(\xi, \lambda)}{\partial\lambda} u(\xi, \lambda) \frac{y_1(\xi, \lambda)y_2(x, \lambda) - y_2(\xi, \lambda)y_1(x, \lambda)}{K(a)} d\xi,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)' = \int_a^x \frac{\partial G(\xi, \lambda)}{\partial\lambda} u(\xi, \lambda) \frac{y_1(\xi, \lambda)y'_2(x, \lambda) - y_2(\xi, \lambda)y'_1(x, \lambda)}{K(a)} d\xi.$$

Alors pour $x = b$ et $u = y_1$ ou $y_2$, on a

$$\frac{\partial y_1(b, \lambda)}{\partial\lambda} = \int_a^b \frac{\partial G(\xi, \lambda)}{\partial\lambda} \frac{y_1(\xi, \lambda)}{K(a)} [y_1(\xi, \lambda)y_2(b, \lambda) - y_2(\xi, \lambda)y_1(b, \lambda)] d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[y'_2(b, \lambda)] = \int_a^b \frac{\partial G(\xi, \lambda)}{\partial\lambda} \frac{y_2(\xi, \lambda)}{K(a)} [y_1(\xi, \lambda)y'_2(b, \lambda) - y_2(\xi, \lambda)y'_1(b, \lambda)] d\xi,$$

d'où

$$F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\frac{\partial G(\xi, \lambda)}{\partial\lambda}}{K(a)} \Big\{ y_2(b, \lambda)y_1^2(\xi, \lambda) + [y'_2(b, \lambda) - y_1(b, \lambda)]\, y_1(\xi, \lambda)y_2(\xi, \lambda) - y'_1(b, \lambda)y_2^2(\xi, \lambda) \Big\} d\xi.$$

Pour déterminer le signe de la forme quadratique en $y_1(\xi, \lambda)$, $y_2(\xi, \lambda)$ qui est entre crochets, envisageons son discriminant; par la formule d'Abel, on le réduit à

$$\left[\frac{y'_2(b,\lambda)+y_1(b,\lambda)}{2}\right]^2 - 1.$$

Nous n'étudions le signe de $F'(\lambda)$ que pour les valeurs de $\lambda$ annulant $F(\lambda)$. Or, pour ces valeurs

$$y_1(b,\lambda)+y'_2(b,\lambda) = 2,$$

donc le déterminant précédent est nul; la forme est le carré de

$$\left[\sqrt{y_2(b)}\,y_1(\xi) \pm \sqrt{-y'_1(b)}\,y_2(\xi)\right],$$

elle sera positive ou négative, selon que $y_2(b)$ et $-y'_1(b)$ sont positifs ou négatifs. [Il est sous-entendu que dans $y_2(b)$, $y'_1(b)$ figurent les valeurs de $\lambda$ racines de $F(\lambda) = 0$.]

Écartons d'abord le cas où cette expression serait identiquement nulle, et, puisque c'est une solution de l'équation différentielle, ceci revient à dire qu'on n'a pas $y_2(b) = 0$ et $y'_1(b) = 0$ à la fois. Nous reviendrons ultérieurement sur ce cas.

La forme quadratique n'étant pas identiquement nulle, en l'intégrant puisque $K(a) > 0$, $\dfrac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda} < 0$. $F'(\lambda)$ trouvé sera du signe contraire de la forme.

Donc dans tout intervalle de variation de $\lambda$ où $y_2(b) \neq 0$, $F(\lambda)$ ne peut avoir plus d'un zéro, car dans cet intervalle la forme, et par suite $F'(\lambda)$ conservent le même signe en tout point où $F(\lambda) = 0$. Même remarque pour un intervalle où $y'_1(b)$ reste $\neq 0$.

Souvenons-nous alors que les $\mu_i$ sont les racines de l'équation

$$y_2(b,\lambda) = 0$$

et les $\nu_i$ les racines de

$$y'_1(b,\lambda) = 0.$$

Entre deux segments consécutifs $(\nu_i \mu_{i-1})$ (*fig.* 2), ni $y'_1$ ni $y_2$ ne sont nuls, donc $F(\lambda)$ ne peut avoir qu'un zéro entre deux tels segments. La distribution des signes de $F(\lambda)$ aux extrémités prouve d'ailleurs que $F(\lambda)$ s'annule au moins une fois entre deux segments consécutifs, $F(\lambda)$ admet donc exactement un zéro entre deux segments $(\nu_i \mu_{i-1})$ consécutifs. De plus, il n'y a pas

de zéros sur les segments eux-mêmes puisque, dans $(\mu_0, \mu_1)$ par exemple (voir *fig.* 2), il n'y en a qu'un et qu'il est entre $\mu_0$ et $\nu_2$. (La même conclusion est facile à tirer pour tous les cas de figure.)

Il y a pour la même raison un zéro de $F(\lambda)$ et un seul entre $\nu_0$ et le segment $(\nu_1, \mu_0)$. Il n'y en a pas entre $\Lambda_1$ et $\nu_0$.

Fig. 3.




Ces résultats fixent les nombres caractéristiques $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ en position (*fig.* 3).

Venons aux fonctions caractéristiques $u_0, u_1, \ldots$.

On sait que, pour $\lambda = \mu_0$, la solution du système auxiliaire (3) s'annule en $a$ et $b$ seulement. Donc, pour $\lambda \leqq \mu_0$, toute solution de l'équation ne peut avoir qu'un zéro dans $(a, b)$; or, toute solution de (1) a un nombre pair de zéros. Donc $u_0$ ne s'annule pas dans $(a, b)$.

Des raisonnements tout pareils prouvent que $u_1$ et $u_2$ auront deux zéros, $u_3$ et $u_4$ en auront 4, etc., ce que nous résumerons dans ce Tableau :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fonctions caractéristiques... | $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | ... |
| Nombre de zéros dans $ab$.... | 0 | 2 | 2 | 4 | 4 | ... |

Ces résultats constituent un théorème d'oscillation pour le cas actuel.

Les seuls cas d'exception que nous ayons encore à considérer sont ceux où quelques-unes des valeurs $\mu_1\nu_2, \mu_3\nu_4, \ldots$ coïncident [puisque l'on connaît d'une façon précise le signe de $F(\lambda) \neq 0$ pour $(\mu_0\nu_1), (\mu_2\nu_3), \ldots$] et où les $\lambda$ coïncideraient avec ces valeurs. C'est justement le cas que nous avons écarté dans la discussion précédente où $y_2(b) = y'_1(b) = 0$ pour une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$.

Ce cas d'exception se présente effectivement dans l'exemple particulier traité précédemment [*voir* (7), § 16]. Il faut alors étudier $F''(\lambda)$ pour ces valeurs de $\lambda$, pour lesquelles $F(\lambda) = F'(\lambda) = 0$.

Or, un calcul analogue à celui fait pour $F'(\lambda)$ prouve que, pour

ces valeurs,

$$F''(\lambda) = 2\int_a^b \frac{\frac{\partial G(x)}{\partial\lambda}}{K(a)}\left[y_1(x)\frac{\partial y_2(x)}{\partial\lambda} - y_2(x)\frac{\partial y_1(x)}{\partial\lambda}\right] dx,$$

d'où, en remplaçant $\frac{\partial y_2}{\partial\lambda}$ et $\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}$ par leurs valeurs trouvées antérieurement,

$$F''(\lambda) = -2\int_a^b\int_a^x \frac{\frac{\partial G(x)}{\partial\lambda}}{K(a)}\,\frac{\frac{\partial G(\xi)}{\partial\lambda}}{K(a)}[y_1(x)y_2(\xi)-y_2(x)y_1(\xi)]^2\,d\xi\,dx$$

et, puisque le crochet qui figure dans l'intégrale double n'est pas identiquement nul ($y_1$ et $y_2$ étant linéairement indépendantes), on a

$$F''(\lambda) < 0.$$

Ces racines multiples de $F(\lambda)$ sont donc exactement des racines doubles et F a un maximum à tous ces points. Il s'ensuit que cette racine double remplace les deux racines simples, qui autrement se trouveraient des deux côtés du segment qui s'est réduit à un point [1].

On trouve enfin très facilement que l'indice du système (1) pour ces valeurs-là est 2, puisque le problème périodique a deux solutions linéairement indépendantes, $y_1$ et $y_2$; à la racine double correspondent ainsi deux fonctions caractéristiques, ayant le nombre de zéros indiqués par le théorème d'oscillation.

Nos résultats se généralisent dans différentes voies. On peut se borner à supposer G décroissant, sans supposer que G possède une dérivée par rapport à $\lambda$. Les méthodes à employer sont plus délicates, mais les résultats sont les mêmes. On peut aussi considérer des conditions non périodiques pour des systèmes toujours adjoints à eux-mêmes. Mais alors les théorèmes d'oscillation sont

---

(1) Si l'on avait par exemple $\mu_1$ et $\nu_2$ confondus, et $\lambda$ une valeur caractéristique confondue avec $\mu_1$ et $\nu_2$, on pourrait se demander si entre $(\mu_1\nu_2)$ et le segment $(\mu_0\nu_1)$ précédent, ainsi qu'entre $(\mu_1\nu_2)$ et $(\mu_2\nu_3)$, il n'y a pas d'autres nombres caractéristiques $\lambda_1$ et $\lambda_2$ différents du $\lambda$ qui est en $(\mu_1\nu_2)$. Or ceci est impossible, car $F(\lambda)$ étant maximum pour la racine double, aux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ supposées exister, $F'(\lambda)$ devrait avoir les signes — et +.

Mais $F(\lambda)$ étant $< 0$ pour $(\mu_0\nu_1)$ et nul pour $(\mu_1\nu_2)$, on voit que, en $\lambda_1$, sa dérivée $F'(\lambda)$ ne pourrait être que positive. Même raisonnement pour $\lambda_2$. La contradiction montre que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ n'existent pas, ils sont venus se confondre avec $\mu_1$ et $\nu_2$.

moins précis : on ne peut donner qu'à une unité près le nombre des zéros des fonctions caractéristiques dans $(a, b)$. Il y a enfin les extensions, jusqu'à présent très incomplètes, aux équations d'ordre supérieur au deuxième.

**19. Deuxième extension des problèmes de Sturm. Le théorème d'oscillation de M. Klein.** — Nous avons, au Chapitre III, étudié des systèmes de la forme

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \end{array}}$$

K ne contenant que la variable $x$, G dépendant de $x$ et d'un paramètre, $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ étant des constantes indépendantes de $\lambda$.

Dans ce qui va suivre, nous envisagerons, au lieu d'un intervalle $(a, b)$ de variation de $x$, un nombre quelconque de tels intervalles

$$(a_0 b_0); \quad (a_1 b_1); \quad \ldots; \quad (a_n b_n)$$

se suivant sur l'axe des $x$ dans l'ordre des indices croissants et n'ayant aucun point commun 2 à 2 (pas même les extrémités). Nous considérons en outre $n+1$ paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dont dépendra la fonction G, chaque paramètre variant dans un intervalle qui lui est propre. Pour chaque segment $a_i$. $b_i$ nous considérerons des conditions telles que

$$\begin{array}{l} \alpha'_0 u(a_0) - \alpha_0 u'(a_0) = 0, \\ \beta'_0 u(b_0) + \beta_0 u'(b_0) = 0, \\ \alpha'_1 u(a_1) - \alpha_1 u'(a_1) = 0, \\ \beta'_1 u(b_1) + \beta_1 u'(b_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le problème que nous nous proposons est le suivant :

Peut-on déterminer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de façon que l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u') - \mathrm{G}u = 0$$

admette $n+1$ solutions $u_0, u_1, \ldots, u_n$,

$u_0$ vérifiant les conditions relatives à $(a_0 b_0)$,
$u_1$ » » » $(a_1 b_1)$,
.........................................,
$u_n$ » » » $(a_n b_n)$.

Pour $n=0$, il est clair qu'on a le problème de Sturm étudié au Chapitre III.

M. Klein a été conduit à ce problème en étudiant les travaux de Lamé sur la distribution de la chaleur dans un ellipsoïde. Le seul cas que nous considérons avec M. Klein est celui où G a la forme particulière

$$(1) \qquad G = l(x) - g(x)[\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n]$$

($\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ variant de $-\infty$ à $+\infty$).

Nous supposerons, pour simplifier, $g(x) > 0$ dans les intervalles $(a_i, b_i)$. En réalité, il suffit de supposer que $g$ ne s'annule dans aucun de ces intervalles, son signe pouvant être différent dans deux intervalles différents. K, $l$ et $g$ seront supposés continus dans chacun des intervalles fermés $(a_i, b_i)$. Nous ne supposons rien sur eux, hors de ces intervalles [1].

On pourrait, à vrai dire, par des changements de la variable indépendante, ne considérer qu'un seul intervalle pour $x$, et $n+1$ systèmes différentiels, mais le résultat s'énonce moins simplement que sous la forme donnée plus haut au problème. Dans ces conditions, on a le théorème d'oscillation suivant dû à M. Klein :

*Il existe une infinité de systèmes* $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *réels pour lesquels les fonctions cherchées* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *existent sans être identiquement nulles.*

*Ces systèmes de nombres caractéristiques se différencient les uns des autres par le nombre de zéros que les fonctions caractéristiques* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *possèdent respectivement dans* $(a_0 b_0), \ldots, (a_n b_n)$. *Si l'on se donne à l'avance* $n+1$ *nombres positifs ou nuls*

$$m_0, \quad m_1, \quad \ldots, \quad m_n,$$

---

[1] Et effectivement, dans l'équation de Lamé, les coefficients ont des singularités *entre les intervalles* $(a_i b_i)$.

*on peut trouver un système* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *et un seul, pour lequel les fonctions* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *ont respectivement* $m_0, m_1, \ldots, m_n$ *zéros dans chacun des intervalles* $(a_0 b_0), (a_1 b_1), \ldots, (a_n b_n)$.

Pour $n = 0$, on a simplement le théorème de Sturm établi au Chapitre III. Nous allons donc procéder par récurrence.

Supposons le théorème vrai jusqu'à l'indice $n - 1$. Démontrons-le pour l'indice $n$.

On peut écrire

$$(2)\quad G(x) = [l(x) - \lambda_n x^n g(x)] - g(x)[\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1}].$$

Donnons à $\lambda_n$ une valeur arbitraire, mais fixe; il existe alors un système, et un seul, de valeurs de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ pour lequel les fonctions caractéristiques $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ ont respectivement, dans

$$\begin{matrix} (a_0 b_0), & (a_1 b_1), & \ldots, & (a_{n-1} b_{n-1}), & \\ m_0, & m_1, & \ldots, & m_{n-1} & \text{zéros.} \end{matrix}$$

Il reste à voir si $\lambda_n$ peut être choisi de façon que $u_n$ existe vérifiant les $(n + 1)$ conditions.

Les $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ précédents sont des fonctions de $\lambda_n$, puisqu'ils sont déterminés quand $\lambda_n$ est connu. En les exprimant en fonction de $\lambda_n$ dans G, G devient fonction de $x$ et de $\lambda_n$ : $G(x, \lambda_n)$.

Nous allons montrer que $G(x, \lambda_n)$ satisfait aux conditions requises par le théorème d'oscillation de Sturm.

Pour cela, considérons la différence $G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)$. Elle s'annule nécessairement pour une valeur de $x$ dans chaque intervalle $(a_0 b_0), (a_1 b_1), \ldots, (a_{n-1} b_{n-1})$; car si, dans $(a_0 b_0)$ par exemple, cette différence ne s'annulait pas, elle aurait un signe constant; par exemple, on aurait $G(x, \lambda_n) > G(x, \lambda'_n)$. Mais, pour la valeur $\lambda'_n$ du paramètre, la solution $u_0$ de l'équation qui vérifie les conditions aux limites relatives à $a_0 b_0$, oscillerait plus vite que pour la valeur $\lambda_n$ (théorème de comparaison de Sturm), et ceci contredit le fait que $u_0$ a toujours, quel que soit $\lambda_n$, un nombre de zéros égal à $m_0$.

Il y a donc au moins

un point $x_0$ dans $(a_0 b_0)$,
un point $x_1$ dans $(a_1 b_1)$,
......................,
un point $x_{n-1}$ dans $(a_{n-1} b_{n-1})$,

tel que la différence précédente soit nulle.

Désignons par $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n-1}$ les valeurs des $n$ premiers paramètres correspondant à $\lambda'_n$. On aura

$$(3)\quad \begin{aligned} &G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n) \\ &\quad = g(x)[(\lambda'_0 - \lambda_0) + (\lambda'_1 - \lambda_1)x + \ldots + (\lambda'_n - \lambda_n)x^n]. \end{aligned}$$

Puisque $g(x)$ a été supposé $\neq 0$ dans tous les $(a_i b_i)$, le polynome entre crochets admet $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pour racines. Donc

$$(4)\quad \begin{aligned} &\lambda'_0 - \lambda_0 + (\lambda'_1 - \lambda_1)x + \ldots + (\lambda'_n - \lambda_n)x^n \\ &\quad = (\lambda'_n - \lambda_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

De là on déduit deux conséquences :

1° La continuité de $G(x, \lambda_n)$ par rapport à $\lambda_n$; car $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ restant dans les intervalles $(a_0 b_0), (a_1 b_1), \ldots, (a_{n-1} b_{n-1})$, sont finis; donc la différence $G(x_1, \lambda_n) - G(x_1, \lambda'_n)$ tend vers zéro avec $\lambda'_n - \lambda_n$. De plus il est évident, d'après la formule qui donne cette différence, que $G(x, \lambda'_n)$ tend vers $G(x, \lambda_n)$ uniformément, quel que soit $x$ dans $a_n, b_n$, quand $\lambda'_n$ tend vers $\lambda_n$. Il y a continuité de $G(x, \lambda_n)$ par rapport aux deux variables indépendantes $x, \lambda_n$.

2° Si $\lambda_n$ croît, $G(x, \lambda_n)$ décroîtra pour tout $x$ dans $a_n b_n$. Car on voit par (3) et (4) que $G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)$ est du signe de $\lambda'_n - \lambda_n$, donc $G(x, \lambda_n)$ est fonction décroissante. Et puisque pour $x$ dans $(a_n b_n)$ le produit $(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$ ne peut jamais être nul, les intervalles $(a_0 b_0), \ldots, (a_{n-1} b_{n-1})$ n'ayant aucun point commun avec $(a_n b_n)$ [1], on voit aussi par (3)

---

[1] Ce théorème reste vrai même quand les intervalles $a_i, b_i$ se touchent ou quand $g(x)$ s'évanouit sans changer de signe en des points isolés. Mais il faut alors se servir d'une forme du théorème d'oscillation de Sturm un peu plns raffinée que celle que nous avons obtenue.

et (4) que

$$\lim_{\lambda_n=+\infty} G(x, \lambda_n) = -\infty,$$

$$\lim_{\lambda_n=-\infty} G(x, \lambda_n) = +\infty.$$

Ces conséquences 1° et 2° suffisent à montrer que les conditions de validité du théorème d'oscillation de Sturm sont ici remplies. Il existe donc, pour chaque nombre $m_n$, une valeur réelle et une seule de $\lambda_n$ pour laquelle l'équation proposée admet une $(n+1)^{\text{ième}}$ solution, $u_n$ satisfaisant aux conditions aux limites relatives à $(a_n b_n)$ et ayant dans cet intervalle exactement $m_n$ zéros.

Le théorème de M. Klein est ainsi démontré pour toute valeur de $n$.

Signalons en passant une application physique du théorème :

On peut dire, pour interpréter le théorème d'oscillation de Sturm dans un cas particulier, qu'une corde hétérogène étant donnée on peut lui faire exécuter des vibrations simples pour lesquelles la corde présente un nombre de nœuds fixé à l'avance.

On peut interpréter le théorème de M. Klein en disant qu'une membrane homogène limitée par deux arcs d'ellipses et deux axes d'hyperboles homofocales étant donnée, on peut la faire vibrer de telle sorte qu'elle présente un nombre $m_0$ d'ellipses homofocales nodales, et un nombre $m_1$ d'hyperboles homofocales nodales, $m_0$ et $m_1$ étant arbitrairement donnés à l'avance.

Nous avons trouvé dans ce qui précède une infinité de systèmes réels de valeurs caractéristiques. Existe-t-il des valeurs imaginaires caractéristiques pour les $\lambda$, c'est-à-dire des systèmes de valeurs de $\lambda$ imaginaires, pour lesquels l'équation admette $n+1$ solutions satisfaisant respectivement aux conditions aux limites relatives aux $n+1$ intervalles $a_i$, $b_i$ ? Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Limitons-nous, pour simplifier l'écriture, au cas typique de trois paramètres.

Soient $(\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2)$, $(\lambda''_0, \lambda''_1, \lambda''_2)$ deux systèmes de valeurs caractéristiques auxquels correspondent respectivement les fonctions caractéristiques

$$u_1 v_1 w_1, \qquad u_2 v_2 w_2,$$

On a

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u'_1) + [g(\lambda'_0 + \lambda'_1 x + \lambda'_2 x^2) - l]u_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{K}u'_2) + [g(\lambda''_0 + \lambda''_1 x + \lambda''_2 x^2) - l]u_2 = 0.$$

Multipliant respectivement les deux équations par $u_2$ et $u_1$, retranchant membre à membre et intégrant entre $a_0$ et $b_0$, on a, à cause des conditions en $a_0$ et $b_0$ que vérifient $u_1$ et $u_2$,

$$\int_{a_0}^{b_0} g[\lambda'_0 - \lambda''_0 + (\lambda'_1 - \lambda''_1)x + (\lambda'_2 - \lambda''_2)x^2]\, u_1 u_2\, dx = 0.$$

De même

$$\int_{a_1}^{b_1} g[\lambda'_0 - \lambda''_0 + (\lambda'_1 - \lambda''_1)x + (\lambda'_2 - \lambda''_2)x^2]\, v_1 v_2\, dx = 0,$$

$$\int_{a_2}^{b_2} g[\lambda'_0 - \lambda''_0 + (\lambda'_1 - \lambda''_1)x + (\lambda'_2 - \lambda''_2)x^2]\, w_1 w_2\, dx = 0.$$

Si les deux systèmes $(\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2)$, $(\lambda''_0, \lambda''_1, \lambda''_2)$ sont distincts, les trois différences $\lambda'_i - \lambda''_i$ n'étant pas toutes nulles, le déterminant des équations linéaires précédentes en $\lambda'_i - \lambda''_i$ est nul. Ce déterminant se réduit à la formule simple

$$\int_{a_0}^{b_0}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} g(x_0)g(x_1)g(x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$
$$\times\, u_1(x_0)u_2(x_0)v_1(x_1)v_2(x_1)w_1(x_2)w_2(x_2)\,dx_0\,dx_1\,dx_2 = 0.$$

Cette formule généralise la formule

$$\int_a^b g u_1 u_2\, dx = 0$$

due à Poisson et rencontrée au paragraphe 16. Elle démontre, pour $g > 0$, que les valeurs caractéristiques sont toutes réelles, car à $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2$ imaginaires et caractéristiques, correspondraient $\lambda''_0, \lambda''_1, \lambda''_2$ caractéristiques et imaginaires conjuguées des valeurs précédentes. Les fonctions $u_1 v_1 w_1$ seraient conjuguées de $u_2 v_2 w_2$. L'élément différentiel de l'intégrale triple ci-dessus

serait toujours $>0$ et non $\equiv 0$, puisque les intervalles $(a_0 b_0)$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ pour $x_0$, $x_1$, $x_2$ n'ont aucun point commun. On a donc contradiction à supposer l'existence de valeurs caractéristiques imaginaires.

Le théorème de M. Klein donne donc toutes les valeurs caractéristiques.

La remarque précédente suggère une extension du théorème de M. Klein. Nous la présenterons brièvement pour trois intervalles $(a_0 b_0)$, $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, mais elle est générale.

Prenons une fonction G de la forme

$$G = l - (\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2).$$

Peut-on déterminer les $\lambda$ de façon à satisfaire à trois systèmes de conditions de Sturm relatives aux trois intervalles ?

Tout d'abord, on peut se demander s'il existe des valeurs caractéristiques imaginaires en $\lambda$. Par un raisonnement très analogue au précédent, on est amené à considérer l'expression

$$\int_{a_0}^{b_0}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \begin{vmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & g_2(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & g_2(x_1) \\ g_0(x_2) & g_1(x_2) & g_2(x_2) \end{vmatrix}$$
$$\times\, u_1(x_0) u_2(x_0) v_1(x_1) v_2(x_1) w_1(x_2) w_2(x_2)\, dx_0\, dx_1\, dx_2$$

et l'on peut achever comme précédemment, si le déterminant qui entre dans l'intégrale triple ne change pas de signe. On est sûr alors que toutes les valeurs caractéristiques sont réelles.

L'étude de cette question pour les valeurs réelles des $\lambda$ a été faite récemment : M. Richardson a étendu à ce cas le théorème d'oscillation de Klein par des méthodes différentes des nôtres qui supposent essentiellement que la différence étudiée $G(x, \lambda_n) - G(x, \lambda'_n)$ est, au facteur $g(x)$ près, un polynome en $x$.

# CHAPITRE V.

## LES FONCTIONS DE GREEN ET LEURS APPLICATIONS [1].

**20. Existence et propriétés fondamentales des fonctions de Green.** — La fonction de Green, pour la résolution du problème de Dirichlet, se définit comme on sait : c'est une fonction harmonique dans le domaine considéré, s'annulant à la frontière et devenant infinie en un point A du domaine comme $\frac{1}{r^{n-2}}$ si $n \geqq 3$ ($n$ étant le nombre de dimensions de l'espace et $r$ la distance d'un point variable M de ce domaine au point A); comme $\log \frac{1}{r}$ si $n = 2$.

On pourrait chercher à donner une définition analogue pour un espace à une dimension, on serait conduit à envisager l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

et la solution de cette équation, qui s'annulant en $a$ et $b$ deviendrait infinie en un point $\xi$ de $(a, b)$. Ceci est impossible, une telle solution n'existe pas. On cherche alors, parmi les propriétés de la fonction de Green, celles qui sont susceptibles de s'étendre aux équations différentielles linéaires ordinaires.

---

[1] Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. IX, 1908, p. 377.
Bounitzky, *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. V, 1909, p. 65.
Bôcher, *Annals of Math.*, t. XIII, 1911, p. 71.
Pour les relations entre les systèmes différentiels et les équations intégrales (mais seulement pour des cas où le système est son propre adjoint), *voir* :
Hilbert, *Gött. Nachr.*, 1904, *Zweite Mitteilung*.
Pour la méthode des approximations successives dans quelques cas particuliers, *voir* :
Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chapitre 6.
Stekloff, *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, t. III, 1901, p. 281.
Kneser, *Math. Annalen*, t. LVIII, 1903, p. 109-116.

A ce point de vue, nous allons nous servir de l'analogie entre les systèmes d'équations linéaires algébriques et les systèmes différentiels.

Envisageons le système

$$(1) \qquad a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont le déterminant $|a_{ik}| \neq 0$, on peut demander une formule de résolution qui explicite le rôle des $b_i$. Pour la présenter simplement, on peut considérer les $n$ systèmes obtenus en remplaçant dans (1) successivement $b_1, b_2, \ldots, b_n$ par 1, alors que tous les autres coefficients $b_i$ sont remplacés par zéro, on aura des systèmes tels que

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n = 1, \\ a_{21}u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}u_n = 0 \end{cases}$$

dont nous appellerons $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ la solution.

Nous aurons ainsi $n$ systèmes qui ne dépendent pas de $b_1, \ldots, b_n$,

$$\begin{array}{llll} u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_n, \\ u''_1, & u''_2, & \ldots, & u''_n, \\ \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots, \\ u_1^{(n)}, & \ldots & \ldots & u_n^{(n)}, \end{array}$$

et l'on voit de suite que la solution du système (1) est

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 = b_1 u'_1 + b_2 u''_1 + \ldots + b_n u_1^{(n)}, \\ u_2 = b_1 u'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n u_2^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = b_1 u'_n + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_n u_n^{(n)}. \end{cases}$$

Une expression analogue pour la solution de l'équation de Poisson

$$\Delta(u) = r(x, y)$$

qui s'évanouit à la frontière, peut être fournie à l'aide de la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ à deux dimensions, qui donne la solution en fonction explicite de $r(x, y)$; c'est

$$u(x, y) = \int\int r(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Pour les équations différentielles, avec des conditions aux limites, on cherchera à définir la fonction de Green, en sorte qu'elle permette d'exprimer les solutions des systèmes différentiels non homogènes, de manière à mettre en évidence les seconds membres de ces systèmes.

Prenons le système

$$(4) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} L(u) = r(x) & \\ U_i(u) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

$L(u)$ est une expression linéaire d'ordre $n$.

Nous supposons que le système

$$(5) \qquad \boxed{\begin{array}{l} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \end{array}}$$

soit incompatible. Alors (4) a exactement une solution. Nous allons l'expliciter en fonction de $r(x)$.

Le système (5) n'ayant pas de solution non $\equiv 0$, prenons dans $a$, $b$ un point $\xi$ et essayons de déterminer une fonction $u$ vérifiant les conditions du système (5) ayant dans $a, b$ des dérivées $u'$, $u''$, ..., $u^{(n-2)}$ continues, une dérivée $u^{(n-1)}$ continue, sauf en $\xi$, où sa discontinuité serait

$$u^{(n-1)}(\xi + 0) - u^{(n-1)}(\xi - 0) = \frac{1}{l_n(\xi)},$$

$l_n(x)$ étant le coefficient de $\frac{d^n u}{dx^n}$ dans $L(u)$, enfin satisfaisant à $L(u) = 0$ en tout point de $(a, b)$, sauf au point $\xi$. Je dis que cette solution est unique, nous la dénommerons $G(x, \xi)$.

Soit en effet $y_1, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales de $L(u) = 0$; cherchons à déterminer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de sorte que

$$u_1(x) = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

représente $G(x, \xi)$ dans $(a, \xi)$ et $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de sorte que

$$u_2(x) = d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n$$

représente $G(x, \xi)$ dans $(\xi, b)$.

1° Pour que $G(x, \xi)$ ait la discontinuité voulue en $\xi$, il faut

$$\begin{aligned}
&c_1 y_1(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) - d_1 y_1(\xi) - \ldots - d_n y_n(\xi) = 0,\\
&c_1 y'_1(\xi) + \ldots + c_n y'_n(\xi) - d_1 y'_1(\xi) - \ldots - d_n y'_n(\xi) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) - d_1 y_1^{(n-2)}(\xi) - \ldots - d_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0,\\
&c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) - d_1 y_1^{(n-1)}(\xi) - \ldots - d_n y_n^{(n-1)}(\xi) = -\frac{1}{l_n(\xi)}.
\end{aligned}$$

Prenant provisoirement $z_i = d_i - c_i$, on a, pour déterminer les $z_i$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&z_1 y_1(\xi) + \ldots + z_n y_n(\xi) = 0,\\
&z_1 y'_1(\xi) + \ldots + z_n y'_n(\xi) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&z_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + z_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{l_n(\xi)}.
\end{aligned}\right.$$

Le déterminant de ces équations est le wronskien de $y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)$. Il est différent de zéro par hypothèse, *les $z_i$ sont donc déterminés d'une façon unique.*

2° Écrivons que les conditions aux limites de (5) sont vérifiées par G. Soit

$$\begin{aligned}
U_i(u) &= [\alpha_i u(a) + \ldots + \alpha_i^{(n-1)} u^{(n-1)}(a)]\\
&+ [\beta_i u(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)} u^{(n-1)}(b)]\\
&= A_i(u) + B_i(u).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
A_i(G) &= A_i(u_1),\\
B_i(G) &= B_i(u_2).
\end{aligned}$$

Donc, les équations sont

$$A_i(u_1) + B_i(u_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En explicitant

$$\begin{aligned}
A_i(u_1) &= c_1 A_i(y_1) + c_2 A_i(y_2) + \ldots + c_n A_i(y_n),\\
B_i(u_2) &= d_1 B_i(y_1) + d_2 B_i(y_2) + \ldots + d_n B_i(y_n),
\end{aligned}$$

et en remarquant que

$$c_i = d_i - z_i,$$

on a

$$(7)\quad \boxed{\begin{aligned}
&d_1 U_i(y_1) + \ldots + d_n U_i(y_n)\\
&\quad = z_1 A_i(y_1) + z_2 A_i(y_2) + \ldots + z_n A_i(y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}}$$

Ces équations déterminent les $d_i$ connaissant les $z_i$ puisque le système (5) étant incompatible, le déterminant

$$\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0;$$

les $c_i$ sont alors aussi déterminées.

Nous avons donc déterminé une fonction $G(x, \xi)$ satisfaisant à nos desiderata. Elle est unique.

D'après les formules qui donnent les $z_i$, puis les $d_i$ et les $c_i$, il est visible que ces quantités sont continues en $\xi$, et par suite $G(x, \xi)$, continu en $(x, \xi)$.

Il en sera de même des dérivées

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}.$$

Montrons maintenant que la résolution du système semi-homogène (4) est très simple à l'aide de $G(x, \xi)$ et que la solution $u(x)$ unique de ce système est, comme pour le problème de Poisson, donnée par la formule

$$u(x) = \int_a^b r(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi. \tag{8}$$

En effet, on a pour les $(n-2)$ premières dérivées de la fonction $u$ définie par (8), à cause de la continuité déjà signalée des dérivées de $G$,

$$u'(x) = \int_a^b r(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \quad G(x, \xi)\, d\xi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u^{(n-2)}(x) = \int_a^b r(\xi) \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} G(x, \xi)\, d\xi.$$

$G^{(n-1)}(x, \xi)$ étant discontinue pour $\xi = x$, écrivons

$$u^{(n-2)}(x) = \int_a^x r(\xi) \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} G(x, \xi)\, d\xi + \int_x^b r(\xi) \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} G(x, \xi)\, d\xi,$$

chacune de ces intégrales peut être différentiée, et l'on a

$$u^{(n-1)}(x) = \int_a^x r(\xi)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,\xi)\,d\xi + \int_x^b r(\xi)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,\xi)\,d\xi$$

$$-\left\{\begin{array}{ll}\left[r(x)\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}G(x,\xi)\right] & (\text{pour } \xi = x - 0) \\ -\left[r(x)\dfrac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}G(x,\xi)\right] & (\text{pour } \xi = x + 0).\end{array}\right.$$

La dérivée $\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}G(x,\xi)$ étant continue pour $\xi = x$, on a encore

$$u^{(n-1)}(x) = \int_a^b r(\xi)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,\xi)\,d\xi.$$

Le même calcul se fait pour $u^{(n)}(x)$; mais le terme correctif, qui était nul pour $u^{(n-1)}$, a ici la valeur

$$r(x)\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi+0} - r(x)\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi-0} = \frac{r(x)}{l_n(x)}.$$

Donc

$$u^{(n)}(x) = \int_a^b r(\xi)\frac{\partial^n}{\partial x^n}G(x,\xi)\,d\xi + \frac{r(x)}{l_n(x)}.$$

Il résulte de ce calcul que l'expression

$$u(x) = \int_a^b r(\xi)\,G(x,\xi)\,d\xi$$

vérifie l'équation

$$L(u) = r.$$

Formant $U_i(u)$, on voit que

$$U_i(u) = \int_a^b r(\xi)\,U_i(G)\,d\xi,$$

et comme $U_i(G) = 0$, on a

$$U_i(u) = 0.$$

L'expression $\int_a^b r(\xi)\,G(x,\xi)\,d\xi$ représente donc la solution unique du système (4).

Dans ce qui précède, nous venons de regarder G non plus comme fonction de $x$, mais comme fonction de $\xi$. Demandons-nous maintenant d'une façon générale quelle est la nature de G regardé

comme fonction de $\xi$. On trouve ici le résultat remarquable suivant :

$G(x, \xi)$ regardé comme fonction de $\xi$ est la fonction de Green du système adjoint de (5), $\xi$ étant, bien entendu, la variable indépendante de ce système et $x$ le point singulier de la fonction de Green.

Pour démontrer ce théorème, on indiquera par $H(x, \xi)$ la fonction de Green du système adjoint, $x$ étant, comme dans (5), la variable indépendante. Considérons deux points quelconques, $\xi_1, \xi_2$, de $a$, $b$. Pour fixer les idées, nous supposerons $\xi_1 < \xi_2$. Appliquons alors la formule de Green en posant

$$u = G(x, \xi_1),$$
$$v = H(x, \xi_2),$$

et en prenant comme limite d'intégration d'abord $a$, $\xi_1 - \varepsilon$, ensuite $\xi_1 + \varepsilon$, $\xi_2 - \varepsilon$, et finalement $\xi_2 + \varepsilon$, $b$. Les intégrales dans ces trois formules se réduisent à zéro, puisque $L(G) = 0$, $M(H) = 0$. Si donc on ajoute les trois formules, on obtient le résultat

$$[P(G, H)]_a^{\xi_1-\varepsilon} + [P(G, H)]_{\xi_1+\varepsilon}^{\xi_2-\varepsilon} + [P(G, H)]_{\xi_2+\varepsilon}^{b} = 0.$$

A cause des conditions aux limites satisfaites par G et H, on voit facilement que les deux parties du premier membre qui se rapportent aux points $a$ et $b$ se détruisent. Enfin, en se rapportant à l'expression explicite pour $P(u, v)$, cité au Chapitre II, on voit que, pour la limite $\varepsilon = 0$, la plupart des autres termes se détruisent, et il reste

$$H(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1).$$

La démonstration se ferait de même si $\xi_1 > \xi_2$ ou si $\xi_1 = \xi_2$. On a donc établi l'identité $H(x, \xi) = G(\xi, x)$, ce qui démontre notre théorème.

On voit qu'un système différentiel qui est son propre adjoint admettra une fonction de Green $G(x, \xi)$ symétrique par rapport aux deux variables

$$G(x, \xi) \equiv G(\xi, x).$$

Et réciproquement, si la fonction de Green d'un système est

symétrique, ce système coïncidera avec son adjoint [1]. La symétrie de la fonction de Green caractérise les systèmes identiques à leurs adjoints.

Signalons en terminant ce paragraphe que la fonction de Green du système (5) fournit également la résolution immédiate du système

$$(9)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} L(u) = r(x) & \\ U_i(u) = \gamma_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

qui a une solution unique, (5) étant incompatible. Pour expliciter cette solution en fonction de $r$ et des $\gamma_i$, nous sommes guidés par ce que nous avons dit des équations algébriques : prenons les $n$ systèmes

$$\begin{array}{lll} L(u) = 0, & L(u) = 0, & L(u) = 0, \\ U_1(u) = 1, & U_1(u) = 0, & U_1(u) = 0, \\ U_2(u) = 0, & U_2(u) = 1, & \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & U_{n-1}(u) = 0, \\ U_n(u) = 0, & U_n(u) = 0, & U_n(u) = 1, \end{array}$$

qui sont indépendants de $r$ et des $\gamma_i$. Chacun d'eux a une solution unique. Désignons respectivement par $G_1(x)$, ..., $G_n(x)$ ces solutions ; un calcul extrêmement simple montre alors que la solution du système (9) est

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi + \gamma_1 G_1(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x),$$

dont l'analogie avec la solution d'un système d'équations algébriques est évidente.

Nous avons supposé dans les considérations précédentes que $a$, $b$ étaient les limites de l'intervalle où $x$ varie. On peut s'affranchir de cette restriction.

Prenons en effet deux points $a$, $b$ quelconques dans l'intervalle $(A, B)$ de variation de $x$ et supposons que les conditions $U_i(u)$ des systèmes (4), (5) ou (9) soient relatives à ces points $a$, $b$;

[1] Ceci est un corollaire du théorème plus général que deux systèmes différentiels, homogènes et incompatibles, sont identiques si leurs fonctions de Green sont identiques.

cherchons alors à définir la fonction de Green hors de $(a, b)$ [1]. Il est bon pour cela de revenir au cas où $a$, $b$ sont les extrémités pour voir comment on pourrait modifier la définition de la fonction de Green.

Appelons $G_a(x, \xi)$, $-G_b(x, \xi)$ les deux fonctions $u_2(x)$ et $u_1(x)$ qui ont servi à former $G(x, \xi)$; on a comme solution du système (4) dans $(a, b)$

$$u(x) = \int_a^x r(\xi)\, G_a(x, \xi)\, d\xi + \int_b^x r(\xi)\, G_b(x, \xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Quand on a mis la solution sous cette forme, il est facile de passer au cas où $a$, $b$ ne sont plus les extrémités en abandonnant l'idée d'une fonction de Green, pour adopter celle d'un *couple de fonctions de Green*.

On prendra pour $G_a(x, \xi)$ et $G_b(x, \xi)$ deux fonctions qui, quand on les regarde comme fonctions de $x$, vérifient dans (A, B) [2] l'équation

$$L(u) = 0$$

et satisfont en outre aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} & G_a(\xi, \xi) + G_b(\xi, \xi) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x}[G_a(x, \xi) + G_b(x, \xi)]_{x=\xi} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}[G_a(x, \xi) + G_b(x, \xi)]_{x=\xi} = 0, \\ & \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}[G_a(x, \xi) + G_b(x, \xi)]_{x=\xi} = \frac{1}{l_n(\xi)} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

et

$$A_i(G_b) = B_i(G_a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

On voit immédiatement que deux telles fonctions existent et sont bien déterminées. Les calculs faits pour le cas où $(a, b)$ coïncidaient avec (A, B) sont encore valables, la formule (10) subsiste entièrement. Enfin, on voit quelle serait la méthode à suivre

---

(1) C'est surtout quand $a$, $b$ sont deux points intérieurs au *domaine de la variable complexe $x$*, que cette extension est intéressante; bien entendu, les coefficients de $L(u) = r$ sont alors supposés analytiques.

(2) Ou dans le domaine de la variable complexe $x$.

pour étendre la fonction de Green au cas où les conditions $U_i(u)$ seraient relatives à plus de deux points de $(A, B)$.

**21. Les rapports entre la théorie des systèmes différentiels et celle des équations intégrales.** — Considérons un système différentiel linéaire; nous supposerons ici qu'on ait pu le mettre sous la forme

$$(1)\qquad \boxed{\begin{aligned} &L(u) = g(x)u + r \\ &U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}}$$

telle que le système

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned} L(u) &= 0 \\ U_i(u) &= 0 \end{aligned}}$$

soit incompatible (nous dirons plus loin quelques mots sur la possibilité d'une telle opération).

On peut alors trouver une équation intégrale équivalente au système (1), c'est-à-dire ayant les mêmes solutions que ce système. En effet, considérons la fonction de Green du système (2), ainsi que les solutions $G_1(x)$, ..., $G_n(x)$ de $n$ systèmes obtenus en remplaçant dans (2) l'une des conditions $U_i(u) = 0$ par $U_i(u) = 1$ sans changer les autres. Soit $u_1$ une solution quelconque de (1) et envisageons le système

$$(3)\qquad \boxed{\begin{aligned} L(u) &= g(x)u_1 + r \\ U_i(u) &= \gamma_i \end{aligned}}$$

Il a une solution unique, car (2) est incompatible, et c'est $u_1$. On a donc

$$u_1(x) = \gamma_1 G_1(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x) + \int_a^b [g(\xi)u_1(\xi) + r(\xi)]\, G(x, \xi)\, d\xi,$$

comme il a été vu au paragraphe 20.

Si l'on regarde cette équation comme déterminant $u_1(x)$, c'est une équation intégrale qui, en posant

$$f(x) = \gamma_1 G_1(x) + \gamma_2 G_2(x) + \ldots + \gamma_n G_n(x) + \int_a^b r(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi$$

et

$$K(x, \xi) = g(\xi)\, G(x, \xi),$$

s'écrit

$$(4) \qquad u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

L'équation (4) admet donc toutes les solutions du système différentiel (1).

Soit ensuite $u_1$ une solution quelconque de l'équation (4). Envisageons le système (3), où dans le deuxième membre $u_1$ est la solution précédente. Ce système a une solution unique $u_2$ donnée par

$$u_2(x) = \gamma_1\, G_1(x) + \ldots + \gamma_n\, G_n(x) + \int_a^b [g(\xi)\, u_1(\xi) + r(\xi)]\, G(x, \xi)\, d\xi.$$

Or $u_1$ vérifie l'équation

$$u_1(x) = \gamma_1\, G_1(x) + \ldots + \gamma_n\, G_n(x) + \int_a^b [g(\xi)\, u_1(\xi) + r(\xi)]\, G(x, \xi)\, d\xi$$

comme on voit en remplaçant $f$ et K dans (4) par leurs valeurs. Donc $u_2(x) = u_1(x)$. Il s'ensuit que $u_2$ est solution non seulement de (3) mais aussi de (1). Le système (1) admet donc toute solution de l'équation (4).

*Tout système différentiel* (1) *équivaut à une équation intégrale* (4).

Si $r \equiv 0$, $\gamma_i = 0$, le système (1) est homogène; il en est de même de l'équation (4), car $f \equiv 0$. Inversement, si $f \equiv 0$, $u = 0$ vérifie (4) et aussi (1). Donc (1) est homogène.

Rappelons que les deux équations

$$(5) \qquad u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

et

$$(6) \qquad v(x) = \int_a^b K(\xi, x)\, v(\xi)\, d\xi,$$

que nous appellerons *équations adjointes*, ont entre elles d'étroites relations. Nous allons montrer le parallélisme qu'elles offrent avec les systèmes différentiels adjoints.

Supposons que l'équation (5) soit équivalente au système

$$(7)\qquad \boxed{\begin{array}{l} L(u) = gu \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

dont

$$(8)\qquad \boxed{\begin{array}{l} M(v) = gv \\ V_i(v) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

est le système adjoint.

La fonction de Green de $L(u) = 0$, $U_i(u) = 0$ étant $G(x, \xi)$, on a vu que celle de $M(v) = 0$, $V_i(v) = 0$ était $G(\xi, x)$.

Les équations intégrales équivalentes aux systèmes (7) et (8) seront alors

$$u(x) = \int_a^b [g(\xi)\, G(x, \xi)]\, u(\xi)\, d\xi,$$

$$v(x) = \int_a^b [g(\xi)\, G(\xi, x)]\, v(\xi)\, d\xi$$

dont la relation avec la précédente n'est pas celle de deux équations adjointes. Toutefois, si l'on écrit

$$w(x) = g(x)\, v(x),$$

on a

$$w(x) = \int_a^b g(x)\, G(\xi, x)\, w(\xi)\, d\xi,$$

qui est bien l'adjointe de l'équation intégrale équivalente à (7).

Il y a donc parallélisme entre deux équations intégrales adjointes et deux systèmes différentiels adjoints.

Le lien que nous venons de signaler permet de démontrer simplement, en nous appuyant sur la théorie des équations intégrales, quelques-uns des résultats que nous avons donnés dans le deuxième Chapitre. Par exemple, le nombre des solutions linéairement indépendantes d'une équation intégrale étant, d'après Fredholm, égal à celui de son adjointe, et à des fonctions $v$ linéairement indépendantes correspondant des fonctions $w$ qui le sont aussi, et inversement, on voit que l'indice d'un système différentiel est égal à celui de son adjoint.

Toutefois, l'étude des systèmes différentiels conduit à des

noyaux $K(x, \xi)$ très particuliers, pour les équations intégrales équivalentes, et les propriétés des systèmes différentiels tiennent souvent à ces formes particulières des noyaux, en sorte que peu de résultats de la théorie des systèmes différentiels sont fournis par la théorie des équations intégrales de type général. Pour l'étude approfondie des systèmes différentiels, la méthode directe est généralement préférable.

La question de la possibilité d'écrire un système différentiel sous la forme

$$\boxed{\begin{array}{l} L(u) = g(x)u + r \\ U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

avec incompatibilité de

$$\boxed{\begin{array}{l} L(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \end{array}}$$

exige une démonstration un peu longue que nous ne donnerons pas [1]. Disnos que non seulement on peut toujours choisir $g(x)$ de façon à obtenir la forme précédente, mais on peut le choisir réel et positif dans $a \leqq x \leqq b$, et cela d'une infinité de manières.

Si alors on suppose $g(x) > 0$, on peut faire des remarques plus précises sur l'équation intégrale.

On peut, en divisant les deux membres de l'équation différentielle par $g(x)$, qui est toujours $> 0$ dans $(a, b)$, supposer qu'on a réduit $g$ à l'unité. La fonction de Green est évidemment altérée dans cette transformation, mais dans la suite on aura l'avantage de prendre le noyau $K(x, \xi)$ égal à $G(x, \xi)$.

Sans supposer que $g$ ait été réduit à 1, on peut remarquer que, si le système

$$L(u) = gu, \qquad U_i(u) = 0$$

est son propre adjoint, il en sera de même de

$$L(u) = 0, \qquad U_i(u) = 0.$$

---

[1] J'ai donné cette démontration dans le *Bulletin de la Société mathématique américaine* pour octobre 1914, p. 1.

Dans ce cas, on a vu que

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

L'équation intégrale à laquelle on est conduit

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

n'est pas à noyau symétrique car

$$K(x, \xi) = G(x, \xi)\, g(\xi)$$

et $g$ n'est pas égal à l'unité. Mais si l'on envisage

$$u_0 = u\sqrt{g(x)},$$

on voit que $u_0$ vérifie l'équation à noyau symétrique

$$u_0(x) = f(x)\sqrt{g(x)} + \int_a^b \left[\sqrt{g(x)}\, G(x, \xi)\sqrt{g(\xi)}\right] u_0(\xi)\, d\xi.$$

Par une petite transformation, on fait donc rentrer la théorie des systèmes adjoints à eux-mêmes dans celle des équations à noyau symétrique.

Enfin, si au lieu d'avoir, comme dans ce qui précède, des $U_i(u)$ portant sur deux points $a$ et $b$, on a des conditions à un point $a$ seulement, on sait que le système

$$L(u) = 0, \qquad U_i(u) = 0,$$

les $U_i$ étant indépendants, se ramène au système

$$\begin{aligned} L(u) &= 0, \\ u(a) &= 0, \\ u'(a) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(n-1)}(a) &= 0 \end{aligned}$$

qui est toujours incompatible.

La fonction de Green $G(x, \xi)$ de ce système sera évidemment nulle de $a$ à $\xi$; en $\xi$ sa dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ aura une discontinuité; dans $(\xi, b)$, $G(x, \xi)$ ne sera plus nulle.

En somme,

$$G(x, \xi) \equiv 0 \qquad \text{pour } x < \xi.$$

Dans toutes les intégrales dans lesquelles $G(x, \xi)$ est en facteur, la partie relative à l'intervalle $(a, \xi)$ est nulle; en particulier, l'équation intégrale, équivalente à un système où les conditions sont à un seul point, est une équation de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi.$$

**22. La méthode des approximations successives pour les systèmes différentiels.** — Nous terminerons en donnant une application des fonctions de Green à la résolution des systèmes différentiels par la méthode des approximations successives sous une forme bien plus générale que celle qui a été considérée dans le premier Chapitre. Nous supposerons le système différentiel donné sous la forme

$$(1) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} L'(u) = L''(u) + r & \\ U'_i(u) = U''_i(u) + \gamma_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

Ici $L'$ et $L''$ sont des expressions différentielles linéaires et homogènes dont la première est d'ordre $n$, la seconde d'ordre inférieur à $n$, et dont les coefficients sont des fonctions continues de $x$. Nous supposons en outre que le coefficient de $\frac{d^n u}{dx^n}$ dans $L'$ n'a pas de zéros dans $(a, b)$. Les $U'$ et $U''$ sont des formes linéaires en $u(a)$, $u'(a)$, ..., $u^{n-1}(a)$, $u(b)$, $u'(b)$, ..., $u^{n-1}(b)$.

A côté du système (1) considérons le système homogène

$$(2) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} L'(u) = 0 & \\ U'_i(u) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

que nous supposons incompatible. Soient $G(x, \xi)$ la fonction de Green du système (2), et $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., $G_n(x)$ les fonctions supplémentaires formées comme au paragraphe 20.

Partons d'une fonction arbitraire $u_0(x)$, et formons les fonctions $u_1$, $u_2$, ... satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{ll} L'(u_m) = L''(u_{m-1}) + r, & \\ U'_i(u_m) = U''_i(u_{m-1}) + \gamma_i & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}$$

Ces fonctions sont déterminées d'une façon univoque puisque le système (2) est incompatible. Si l'on écrit

$$u_1 = v_1, \quad u_2 - u_1 = v_2, \quad u_3 - u_2 = v_3, \quad \ldots,$$

on voit que, pour $m \geqq 2$,

$$(3) \qquad v_m = U''_1(v_{m-1})G_1(x) + \ldots + U''_n(v_{m-1})G_n(x) + \int_a^b L''[v_{m-1}(\xi)]G(x,\xi)\,d\xi.$$

On démontre alors, d'une façon tout à fait analogue à celle du paragraphe 1, qu'une solution $u$ du système (1) est donnée par la série

$$(4) \qquad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

et les dérivées $u', u'', \ldots, u^{(n-1)}$ par les séries

$$(5) \qquad v_1^{(k)} + v_2^{(k)} + \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

pourvu que toutes ces séries (4), (5) convergent uniformément dans $(a, b)$. Dans ce cas nous dirons simplement que la méthode des approximations successives converge. Cette convergence n'aura pas toujours lieu, même dans le cas où le système (1) a une solution unique. Pour traiter cette question désignons par A le plus grand des maximums des modules des fonctions

$$G(x,\xi), \quad \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}},$$

$$G_k(x), \quad G'_k(x), \quad \ldots, \quad G_k^{(n-1)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient $\Sigma$ la somme des modules des coefficients de toutes les expressions $U''_i$, et $F(x)$ la somme des modules des coefficients de $L''$. Désignons enfin par B la constante

$$B = \Sigma + \int_a^b F(x)\,dx.$$

On voit alors facilement que toutes les séries (4), (5) sont absolument et uniformément convergentes si $B < \frac{1}{A}$. Puisque A ne dépend que des $L'$ et $U'_i$ tandis que B dépend seulement des $L''$ et $U''_i$, la méthode des approximations successives convergera cer-

tainement si, les $L'$ et les $U'_i$ étant donnés, les coefficients des $L''$ et des $U''_i$ sont de modules assez petits.

Introduisons donc un paramètre $\lambda$, et considérons le système

$$(6) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} L'(u) = \lambda[L''(u) + r''] + r' & \\ U'_i(u) = \lambda[U''_i(u) + \gamma''_i] + \gamma'_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

où $r' + r'' = r$, $\gamma'_i + \gamma''_i = \gamma_i$. Le système (6) se réduit au système (1) quand $\lambda = 1$, et, d'autre part, la méthode des approximations successives appliquée au système (6) convergera certainement, d'après ce que nous avons dit, quand le module de $\lambda$ est assez petit.

Les séries analogues à (4) et (5) que l'on obtient en intégrant le système (6) seront, d'après (3), des séries de puissances en $\lambda$ pourvu que $u_1 = v_1$ ne dépende pas de $\lambda$, ce qui aura lieu si la fonction $u_0$ est assujettie aux conditions

$$\begin{array}{ll} L''(u_0) + r'' = 0, & \\ U''_i(u_0) + \gamma''_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que ces équations sont satisfaites. La série de puissances que l'on obtient en intégrant le système (6) par la méthode des approximations successives convergera alors certainement si $|\lambda|$ est assez petit. Il s'agit de savoir si elle converge quand $\lambda = 1$.

Envisageons d'abord un système plus général dont (6) n'est qu'un cas particulier :

$$(7) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} L(u) = r & \\ U_i(u) = \gamma_i & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}}$$

où les coefficients de $L(u)$ et la fonction $r$ sont analytiques en $\lambda$ dans un certain domaine de Weierstrass et continues en $(x, \lambda)$, les $\gamma_i$ et les coefficients des $U_i$ étant analytiques en $\lambda$. Nous n'admettrons pas que toutes les valeurs de $\lambda$ dans le domaine de Weierstrass soient des nombres caractéristiques.

Sous ces conditions *la solution de* (7) *sera, sauf pour les valeurs caractéristiques de* $\lambda$, *une fonction analytique en* $\lambda$ *et continue en* $(x, \lambda)$. Pour démontrer cette proposition il suffit de

considérer la fonction

$$(8)\qquad \frac{\begin{vmatrix} u_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ U_1(u_0)-\gamma_1 & U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(u_0)-\gamma_n & U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

où $u_0$ est une solution analytique en $\lambda$ et continue en $(x, \lambda)$ de l'équation $L(u) = r$, et $y_1, \dots, y_n$ sont des fonctions analytiques en $\lambda$ et continues en $(x, \lambda)$ qui forment un système fondamental de l'équation $L(u) = 0$. Quand $\lambda$ n'est pas un nombre caractéristique, la fonction (8), qui est analytique en $\lambda$ et continue en $(x, \lambda)$, satisfait au système (7). Puisque le système (7) n'a dans ce cas qu'une solution unique, notre démonstration est achevée.

Il s'ensuit que la série de puissances que l'on obtient en appliquant la méthode des approximations successives au système (6) convergera dans tout cercle décrit autour du point $\lambda = 0$ comme centre et ne contenant aucun point qui correspond à un nombre caractéristique. Ce résultat peut aussi s'énoncer sous cette autre forme :

La méthode des approximations successives, comme nous l'avons appliquée au système (1), convergera si le système auxiliaire (6) n'a aucun nombre caractéristique dont le module est plus petit que 1 ou égal à 1.

Prenons comme exemple le cas ou tous les coefficients dans les $U''_i$ sont zéro ainsi que tous les coefficients de $u(b)$, $u'(b), \dots, u^{n-1}(b)$ dans les $U'_i$. Le système (6) possède alors pour toutes les valeurs de $\lambda$ une solution et une seule. Donc dans ce cas la méthode des approximations successives appliquée au système (1) convergera.

Revenons maintenant au système (7) et à sa solution (8). Soit $\lambda_1$ un nombre caractéristique de (7), c'est-à-dire une valeur de $\lambda$ pour laquelle le dénominateur de (8) s'évanouit. Ce point sera, en général, un pôle de la fonction (8), pôle dont l'ordre ne peut être plus élevé que la *multiplicité* du nombre caractéristique $\lambda_1$. Si la

fonction (8) n'a pas de pôle au point $\lambda_1$, elle sera encore pour cette valeur de $\lambda$ solution du système (7), et nous aurons devant nous le cas exceptionnel, considéré à la fin du paragraphe 9, où, même pour un nombre caractéristique, le système non homogène (7) a une solution. Ces remarques donnent le résultat suivant quand on les applique au système (6) :

La méthode des approximations successives, appliquée comme nous l'avons fait au système (1) ne convergera pas si le système auxiliaire (6) a un nombre caractéristique de module plus petit que 1 pour lequel le système (6) n'a pas de solution.

Considérons maintenant le cas d'un nombre caractéristique dont la multiplicité et l'indice ont la même valeur $k$. C'est un cas particulier très important qui se présentera, par exemple, toujours pour les nombres caractéristiques de multiplité 1 (*voir* § 11). Si pour $\lambda = \lambda_1$ le système (7) a une solution, le rang du système

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} U_1(u_0) - \gamma_1 & U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ U_n(u_0) - \gamma_n & U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

sera pour $\lambda = \lambda_1$ égal à $n - k$, comme le sera aussi le rang du déterminant au dénominateur de (8) (*voir* § 5). Il s'ensuit que tous les déterminants d'ordre $n$ du système (9) auront pour $\lambda = \lambda_1$ des zéros d'ordres au moins égaux à $k$, comme on le voit en formant les dérivées successives de ces déterminants par rapport à $\lambda$. Puisque le dénominateur de (8) a par hypothèse un zéro d'ordre $k$ au point $\lambda = \lambda_1$, on voit que dans le cas actuel *la fonction* (8) *n'a pas de pôle en ce point.*

En appliquant ce résultat au système (6), nous obtenons le théorème suivant :

« La méthode des approximations successives, comme nous l'avons appliqué au système (1), convergera même si le système auxiliaire (6) a des nombres caractéristiques dont le module est $\leqq 1$ pourvu que pour chacun de ces nombres caractéristiques : 1° le système (6) ait une solution, et 2° l'indice soit égal à la multiplicité. »

C'est une généralisation d'un résultat très particulier donné par Liouville en 1840 (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 356).

FIN.

# TABLE DES MATIÈRES.

## CHAPITRE IV.

### LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES ET LEURS ZÉROS DANS QUELQUES CAS PLUS GÉNÉRAUX.



## CHAPITRE V.

### LES FONCTIONS DE GREEN ET LEURS APPLICATIONS.



FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

56029 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et C^ie, quai des Grands-Augustins, 55.

61374 Paris.— Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins. 20